

1. Órai feladatok 3. hét

1.1. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n}$$

Becsüljük alulról és felülről a kifejezést! Az alsó becsléshez hagyjuk el a 2^n tagot. Felső becsléshez írjunk 2^n helyére 5^n -t. Ekkor

$$\sqrt[n]{5^n} < \sqrt[n]{2^n + 5^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 5^n}.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 5^n} = 5$$

így a rendőr elv alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 5^n} = 5.$$

1.2. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n}{3^n + (-5)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot (-1)^n}{3^n \left(1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^n\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + \left(-\frac{5}{3}\right)^n} = 0$$

1.3. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

1.4. feladat

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-4}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1 - \frac{4}{n})}{\sqrt{n} \left(\sqrt{2 - \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \infty \end{aligned}$$

1.5. feladat

Lássuk be először a sorozatról, hogy korlátos és monoton, ebből következni fog, hogy létezik határértéke. Az első elemeket megvizsgálva sejtjük, hogy $a_n < 3 \forall n \in \mathbb{N}$ esetén. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy adott n -ig teljesül az, hogy $a_n < 3$. Kéne, hogy $a_{n+1} < 3$ is teljesüljön.

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} < \sqrt{3 + 2 \cdot 3} = 3$$

Beláttuk, hogy a sorozat korlátos, hiszen $0 < a_n$ nyilván teljesül.

Vizsgáljuk meg a monotonitást. Azt sejtjük, hogy nő, azaz $a_n < a_{n+1}$.

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} > a_n$$

Négyzetre emelés, majd rendezés után

$$a_n^2 - 2a_n - 3 < 0.$$

Szorzáttá alakítható a kifejezés

$$a_n^2 - 2a_n - 3 = (a_n - 3)(a_n + 1) < 0.$$

Ez nyilván teljesül, hiszen $a_n - 3 < 0$ és $a_n + 1 > 0$.

Tehát a sorozat korlátos és monoton, ezért létezik határértéke. Írjuk fel a rekurziót, majd vegyük a határértékét a kifejezésnek!

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + 2a_n} = \sqrt{3 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, ekkor nyilván $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A$.

$$A = \sqrt{3 + 2A}$$

Négyzetre emelés, majd rendezés után

$$A^2 - 2A - 3 = 0.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $A = -1$ vagy $A = 3$. Mivel $0 < a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = 3$.

1.6. feladat

Azt fogjuk belátni a sorozatról, hogy korlátos és monoton csökken. Vizsgáljuk meg a korlátosságot! Látható, hogy $0 < a_n$ teljesül. Sejtjük, hogy $a_n \leq 1$. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy adott n -ig $a_n \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Kéne, hogy $a_{n+1} \leq 1$ is teljesüljön.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1} \leq \frac{2}{n+1} \leq 1$$

Látható, hogy $a_n = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = 1$, azaz $a_1 = a_2 = 1$.

A monotonitáshoz az kell, hogy $a_{n+1} < a_n$ teljesüljön, ha $n > 1$.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1} < a_n$$

a_n -el való leosztás után kapjuk, hogy

$$\frac{2}{n+1} < 1.$$

Ez pedig nyilván teljesül. Tehát a sorozat korlátos és monoton, így biztosan létezik határértéke. Legyen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$. Írjuk fel a rekurziót, majd vegyük a kifejezés határértékét!

$$a_{n+1} = \frac{2a_n}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{n+1}$$

$$A = \frac{2A}{n+1}$$

$$(n-1) \cdot A = 0$$

Mivel $n \rightarrow \infty$, így ez csak akkor teljesülhet, ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = 0$.

1.7. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)^{\frac{2n+3}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n}} = e^2$$

1.8. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-4}{n+5}\right)^{4n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{9}{n+5}\right)^{-\frac{n+5}{9}} \right)^{-\frac{36n+9}{n+5}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{36n+9}{n+5}} = \frac{1}{e^{36}}$$

1.9. feladat

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1) - n^2}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

1.10. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^6 + 2^n}$$

Becsüljük alulról és felülről a kifejezést! Az alsó becsléshez hagyjuk el az n^6 tagot. Felső becsléshez írjunk n^6 helyére 2^n -t.

$$\sqrt[n]{2^n} < \sqrt[n]{n^6 + 2^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 2^n}.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2$$

így a rendőr elv alapján azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^6 + 2^n} = 2.$$