

1. Órai feladatok 2. hét

1.1. feladat

$$H := (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$$

Nyilván $\sup(H) = 1$ illetve $\inf(H) = -1$, hiszen a $(-1, 1)$ halmazban tetszőlegesen közel vannak racionális számok -1 -hez és 1 -hez. Emiatt viszont a halmaznak nem létezik maximuma és minimuma.

1.2. feladat

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4$$

Definiáljuk az $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ számokat a következőképpen: legyen $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$ illetve legyen $a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$. Ekkor a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség miatt

$$\sqrt[n+2]{\prod_{k=1}^n a_k} = \sqrt[n+2]{\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{\sum_{k=1}^{n+2} a_k}{n+2} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+2} = 1.$$

Ebből nyilván

$$\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 \implies \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4.$$

1.3. feladat

$$H := \left\{ \frac{3n-1}{2n+5} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Látható, hogy a halmaz elemei egyben egy a_n sorozat elemei is, ahol

$$a_n = \frac{3n-1}{2n+5} = \frac{\frac{3}{2} \cdot (2n+5) - \frac{3}{2} \cdot 5 - 1}{2n+5} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{17}{2}}{2n+5} = \frac{3}{2} - \frac{17}{4n+10}.$$

Látható, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő, illetve az is, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}.$$

Ahhoz, hogy a minimumot megkapjuk, elég $n = 1$ -et helyettesíteni. Az infimum egyenlő lesz a minimummal, a szuprémum a határérték lesz, maximum pedig nem létezik. Tehát

$$\min(H) = \inf(H) = \frac{2}{7} \quad \sup(H) = \frac{3}{2} \quad \nexists \max(H).$$

1.4. feladat

$$H := \left\{ \frac{k}{n} \mid k, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2, \quad 1 \leq k \leq n-1 \right\}$$

Ennek a halmaznak nincsen sem minimuma, sem maximuma, hiszen

$$\sup(H) = \lim_{\substack{k \rightarrow n-1 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{k}{n} = 1$$

illetve

$$\inf(H) = \lim_{\substack{k=1 \\ n \rightarrow \infty}} \frac{k}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

1.5. feladat

$$H = (-1, 2) \cup (2, 3]$$

$$\text{int}(H) = (-1, 3) \quad \text{ext}(H) = (-\infty, -1) \cup (3, \infty) \quad \partial H = \{-1, 3\}$$

A H halmaz nem nyílt, hiszen nem minden pontja belső pont (a 3 határpont), illetve nem is zárt, mert nem tartalmazza az összes határpontját.

$$M = [1, 2]$$

$$\text{int}(M) = (1, 2) \quad \text{ext}(M) = (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \quad \partial M = \{1, 2\}$$

Az M halmaz nem nyílt, de zárt.

$$E = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{int}(E) = \emptyset \quad \text{ext}(E) = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\} \quad \partial E = \{1, 2, 3\}$$

Az E halmaz nem nyílt, de zárt.

1.6. feladat

Tudjuk, hogy adott $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ számokra

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}$$

illetve

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

Összeszorozva a két egyenlőtlenséget

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \cdot \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \frac{1}{a_k}} = 1.$$

Felszorozva n^2 -el kapjuk is a bizonyítandót.

1.7. feladat

Legyen a téglalap kerülete adott K , továbbá legyen x az egyik oldala. Ekkor a másik oldal nyilván $\frac{K}{2} - x$. A területet felülről becsülhetjük, hiszen

$$T = x \cdot \left(\frac{K}{2} - x \right)$$

ahol

$$\sqrt{x \cdot \left(\frac{K}{2} - x \right)} \leq \frac{x + \frac{K}{2} - x}{2} = \frac{K}{4}.$$

Ebből

$$T \leq \frac{K^2}{16}.$$

Egyenlőség akkor, ha $x = \frac{K}{2} - x$, azaz $x = \frac{K}{4}$ (ekkor négyzetet kapunk).

1.8. feladat

$$a_n = 1 - 10^{-n} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

A definícióból

$$\left| 1 - \frac{1}{10^n} - 1 \right| < \frac{1}{10^3}$$
$$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{10^3} \implies n > 3$$

kell. Ehhez küszöbindexnek jó az $N = 4$.

1.9. feladat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left(1 - \frac{7}{n} + \frac{6}{n^2} - \frac{10}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$