

1. Órai feladatok 1. hét

1.1. feladat

$$3^n > n^3$$

Ha $n > 3$.

Megvizsgálva $n = 4$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön. Tudjuk, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n^3.$$

Az kéne, hogy

$$3n^3 > (n+1)^3$$

teljesüljön. Bontsuk fel a zárójelet!

$$3n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$2n^3 > 3n^2 + 3n + 1$$

Becsüljük felülről a jobb oldalt! Nyilván $n > 3$ esetén $3n^2 + 3n + 1 < 7n^2$ teljesül. Továbbá láthatjuk, hogy $n \geq 4$ esetén $7n^2 < 2n^3$ teljesül. Tehát

$$2n^3 > 7n^2 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Ezzel az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.2. feladat

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Megvizsgálva $n = 1$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k} = \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2n+2} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2}$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{\sqrt{2n+1}}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

teljesül. Keresztbe szorzással tüntessük el a törteket!

$$\sqrt{(2n+1)(2n+3)} = \sqrt{4n^2 + 8n + 3} < 2n+2 = \sqrt{4n^2 + 8n + 4}$$

Mivel a gyökfüggvény szigorúan monoton nő, ez nyilván teljesül. Ezzel az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.3. feladat

$$5|2^{4n+1} + 3$$

Megvizsgálva $n = 1$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$2^{4n+5} + 3 = 2^4 \cdot 2^{4n+1} + 3 = 16 \cdot 2^{4n+1} + 3 = 15 \cdot 2^{4n+1} + 2^{4n+1} + 3$$

Mivel $5|15 \cdot 2^{4n+1}$, ezzel az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.4. feladat

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Megvizsgálva $n = 1$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} \cdot (n^2 + 4n + 4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

Ezzel az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.5. feladat

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) = n + 1$$

Megvizsgálva $n = 1$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = (n+1) \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = n+2$$

Ezzel az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.6. feladat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$$

Megvizsgálva $n = 1$ -re, azt látjuk, hogy teljesül az állítás.

Tegyük fel, hogy adott n -re teljesül az állítás. Kéne, hogy $n + 1$ -re is teljesüljön.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Azt kell belátnunk, hogy

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}.$$

Szorozzunk fel $\sqrt{n+1}$ -el.

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2n + 2$$

$$2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$$

Négyzetre emelés után

$$4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1.$$

Ez nyilván teljesül, így az indukciós eljárást befejeztük, beláttuk az állítást.

1.7. feladat

Indirekten bizonyítunk. Tehát tegyük fel, hogy

$$a \cdot x = b.$$

ahol a és b racionális, illetve x irracionális. Legyen tehát $a = \frac{c}{d}$ és $b = \frac{e}{f}$. Ekkor

$$x = \frac{e}{f} \cdot \frac{d}{c} = \frac{e \cdot d}{f \cdot c}.$$

Tehát x felírható két egész szám hányadosaként, azonban ez nem lehet, hiszen x irracionális. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát az eredeti feltevésünk hibás volt. Ezzel beláttuk, hogy egy racionális és egy irracionális szám szorzata szintén irracionális.