

1. Polcz 4. hét

1.1. feladat

1.1.1. (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 5 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 20$$

1.1.2. (b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot (-3)^{k-1} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 3^k$$

Alkalmazva a hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^{n+1}}{(-1)^n \cdot 3^n} \right| = 3 > 1$$

így

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 3^k$$

divergens.

1.1.3. (c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-1} = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^k = 2 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{5}{3}$$

1.1.4. (d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{2^{k-3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{\frac{1}{2^2} \cdot 2^k} = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

1.1.5. (e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k+3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \right) = \frac{5}{6}$$

1.1.6. (f)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k} - \frac{1}{3(k+3)} = \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+2)} + \frac{1}{3(n+3)} \right) = \frac{11}{18} \end{aligned}$$

1.2. feladat**1.2.1. (a)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 + 5}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2 + 5}}{\frac{2^n}{n^2 + 5}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot (n^2 + 5)}{(n+1)^2 + 5} = 2 > 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2 + 5}$$

divergens.

1.2.2. (b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k - 1}{k^2}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{4n+3}{(n+1)^2}}{\frac{4n-1}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot (4n+3)}{(n+1)^2 \cdot (4n-1)} = 1$$

így nem lehet eldönteni a hányadoskritériummal.

1.2.3. (c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6k+5}}{3^k}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{6n+11}}{3^{n+1}}}{\frac{\sqrt{6n+5}}{3^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6n+11}}{3 \cdot \sqrt{6n+5}} = \frac{1}{3} < 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{6k+5}}{3^k}$$

konvergens.

1.2.4. (d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3k+8}}{k^2}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{\sqrt{3n+11}}{(n+1)^2}}{\frac{\sqrt{3n+8}}{n^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \sqrt{3n+11}}{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3n+8}} = 1$$

így nem lehet eldönteni a hányadoskritériummal.

1.2.5. (e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10} = \infty$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{10^k}$$

divergens.

1.2.6. (f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 2}{k^k}$$

Alkalmazva a gyenge hányadoskritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n^2+2}{n^n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \cdot ((n+1)^2 + 2)}{(n+1)^{n+1} \cdot (n^2 + 2)} = 0 < 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 2}{k^k}$$

konvergens.

1.3. feladat

1.3.1. (a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{6^k}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3n+4}{6^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3n+4}}{6} = \frac{1}{6} < 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k+4}{6^k}$$

konvergens.

1.3.2. (b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+1}}{5^k}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^{n+1}}{5^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}}}{5} = \infty$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+1}}{5^k}$$

divergens.

1.3.3. (c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+9}{3k+5} \right)^{2k}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+9}{3n+5} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n+9}{3n+5} \right)^2 = \frac{16}{9} > 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+9}{3k+5} \right)^{2k}$$

divergens.

1.3.4. (d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4k+1}{4k+5} \right)^k$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{4n+5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{4n+5} = 1$$

így nem lehet eldönteni a gyökkritériummal.

1.3.5. (e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+7}{3k+1} \right)^{k^2}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+7}{3n+1} \right)^{n^2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+7}{3n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{3n+1} \right)^{\frac{3n+1}{6}} \right)^{\frac{6n}{3n+1}} = \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{3n+1}} = e^2 > 1 \end{aligned}$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+7}{3k+1} \right)^{k^2}$$

divergens.

1.3.6. (f)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2} \right)^{k+3}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^{n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$$

így

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k+3}{3k+2} \right)^{k+2}$$

konvergens.

1.3.7. (g)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+2}{k^2}$$

Alkalmazva a gyenge gyökkritériumot azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{5n+2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5n+2)^{\frac{1}{n}}}{n^{\frac{2}{n}}} = 1$$

így nem lehet eldönteni a gyökkritériummal.

1.4. feladat**1.4.1. (a)**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{k^3+4k} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

1.4.2. (b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k^3+k+3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k^3} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

1.4.3. (c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2+3k} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{4k^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

1.4.4. (d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3^k}{2^k+4} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2 \cdot 2^k} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$