

80. Az összeadás kommutativitása és asszociativitása miatt igaz.
81. Igaz. **82.** Nem igaz. **83.** Igaz.
84. $4 \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \right)$.
85. Tekintsük az előző feladatbeli másodfokú függvényt. Egy másodfokú függvény akkor és csak akkor nagyobb vagy egyenlő 0-nál minden x -re, ha a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem pozitív, amiből már adódik az egyenlőtlenség. Ebből az is látható, hogy $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 > 0$ esetben egyenlőség pontosan akkor van, ha létezik olyan $x_0 \in \mathbf{R}$, hogy minden k -ra $a_k x_0 + b_k = 0$. Az egyenlőség akkor is igaz, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.
86. A Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenségből következik.
87. Alkalmazzuk a Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenséget.
88. -3 . **89.** $(n - m + 1)c$. **90.** $1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$.
91. $-\frac{399}{400}$. **92.** $a_1 - a_{n+1}$. **93.** $1 - \frac{1}{n+1}$.
94. Felhasználva a $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$ azonosságot, ha $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx$, akkor $S_n(x) \cdot 2 \sin \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^n \left(\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x \right) = \cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x = 2 \sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x$. Ebből, ha $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, akkor $S_n(x) = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$. Ha $\sin \frac{x}{2} = 0$, akkor $S_n(x) = 0$.
95. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = n$.
96. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{k=1}^n nk = \frac{n^2(n+1)}{2}$.
97. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \sum_{k=1}^n \left(nk - \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)}{2} = 0$.
98. $9 \cdot 10 + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 = 209$. **99.** $(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.
100. $\frac{n}{(2n+2)(2n+3)}$. **101.** $\frac{(n+k+1)(n+k+2) \dots (2n+1)}{(n-k+1)(n-k+2) \dots n}$.
102. Ha $k|m$ és $k|(m+n)$, akkor van olyan $r, t \in \mathbf{Z}$, hogy $m = rk$ és $m+n = tk$, ezért $n = (t-r)k$. Mivel $t-r \in \mathbf{Z}$, így $k|n$. Hasonlóan látható be az állítás megfordítása is.
103. $n = 1$ esetben igaz az állítás. Tegyük fel, hogy az n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ebből bizonyítjuk, hogy $(n+1)$ -re is igaz, azaz $1 + n + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$:

$$1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy minden n pozitív egész számra igaz az állítás, azaz $n_0 = 1$.

104. Az állítás az $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ azonosság alapján igazolható, $n_0 = 1$.
107. $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n -re igaz az állítás. Ekkor $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} & 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 \\ &= (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = -(-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$= (-1)^n \frac{2(n+1)^2 - n(n+1)}{2} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

115. $n = 1$ esetben a két oldal egyenlő, $n = 2$ esetben érvényes az egyenlőtlenség: $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ pontosan akkor, ha $3\sqrt{7} < 8$, azaz ha $63 < 64$, ami igaz. Tegyük fel, hogy n -re érvényes az egyenlőtlenség. Ekkor beszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát $\frac{2n+1}{2n+2}$ -vel, kapjuk hogy

$$\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2};$$

Az $\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}}$ egyenlőtlenség mindkét oldal négyzetreemelésével igazolható, ez pedig bizonyítja az állítás helyességét $(n+1)$ -re.

116. $n = 2$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n -re igaz. Ekkor:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \\ & \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \\ & \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24}. \end{aligned}$$

117. $n = 2$ -re igaz az állítás: $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}$, mivel $2 < \sqrt{2} + 1 < 4$. Tegyük fel, hogy n -re igaz az állítás. Ekkor: $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$.

118. $n = 2$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n -re is igaz. Akkor $(n+1)$ -re:

$$\begin{aligned} & \frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} < \\ & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}-1} < \\ & n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n-1} < \\ & n + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = n + 2^n \frac{1}{2^n} = n + 1. \end{aligned}$$

119. $n_0 = 4$. A $3^n > 2^n + 7n$ indukciós feltevés alapján: $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^n + 7n)$. Ebből a $3 \cdot 2^n + 3 \cdot 7n = (2+1)2^n + (2+1)7n = 2^{n+1} + 7n + 2^n + 2 \cdot 7n > 2^{n+1} + 7n + 7 = 2^{n+1} + 7(n+1)$ alapján adódik az állítás.

120. Teljes indukcióval, felhasználva, hogy

$$\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{2(2n+1)}{n+1} < 4^{n-1} 4 = 4^n,$$

azt kapjuk, hogy $n > 1$ esetén az állítás igaz.