

Analízis ZH konzultáció

1. Teljes indukció

Elméleti segítség:

- $n=1$ -re bebizonyítani (vagy arra az n -re, ahonnan az állítást igazolni szeretnénk)
- feltesszük, hogy n -re igaz az állítás $\rightarrow n+1$ -re is igaz lesz?
legfontosabb trükk: indukciós feltevés becsempészése az igazolandó állításba
- típusfeladatok: egyenlőség, egyenlőtlenség, oszthatóság bizonyítása

Feladat:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

- $n=1$ -re

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

- n -re teljesül $\rightarrow n+1$ -re is

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

indukciós feltétel becsempészésével:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Teljes indukciós feladatoknál fontos lenne említeni a zárt alak fogalmát. Σ -s, Π -s zárt alakot fel kell tudni írni kibontott alakból!

Például:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n 2k - 1$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) = \prod_{k=1}^n 2k - 1$$

2. Határérték meghatározása

Elméleti segítség:

- polinomok (∞ -be tartanak, a legmagasabb fokú hatványos tag előjelétől függően $+/-\infty$)
- törtek (legmagasabb hatványú tag kiemelése számlálóban és nevezőben is, tarthat $\infty/0$ /konstansba)
- gyökös kifejezések (gyöktelenítés)
- rekurzív sorozatok (korlátosság és monotonitás bizonyítása, majd határérték kiszámítása)

- e -s határértékek (nevezetes e -s határértékre alakítás algebrai műveletekkel)
- rendőrelv (két olyan sorozattal lenne érdemes becsülni, melyet nevezetes határértékre lehet visszavezetni)

Feladatok:

- tört határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 20}{12n^2 + 31}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 17}{n^2 + 6n + 7}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 3n + 1}{11n^2 + 11}$$

- gyökös kifejezés határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3n + 2} - \sqrt{2n}$$

- e -s határérték:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n + 2}{3n - 7} \right)^{6n+8} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n \left(1 + \frac{2}{3n} \right)}{3n \left(1 - \frac{7}{3n} \right)} \right)^{6n+8} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n \left(1 + \frac{2}{3n} \right)}{3n \left(1 - \frac{7}{3n} \right)} \right)^{6n} \cdot \left(\frac{3n \left(1 + \frac{2}{3n} \right)}{3n \left(1 - \frac{7}{3n} \right)} \right)^8 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1 + \frac{2}{3n}}{1 - \frac{7}{3n}} \right)^{3n} \right)^2 = \left(\frac{e^2}{e^{-7}} \right)^2 = e^{18} \end{aligned}$$

- rendőrelv:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^4 + 3n^3}{5^{3n} + 8^n}}$$

a számlálóban/nevezőben összeg szerepel -> egy tagú kifejezéssel (vagy szorzattal) kellene alulról és felülről is becsülni; olyan kifejezéssel melynek nevezetes határértéke van
alulról becslés: számláló csökkentése, nevező növelése

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{2 \cdot 5^{3n}}}$$

felülről becslés: fordítva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n^4}{5^{3n}}}$$

- rekurzív sorozat:

$$a_1 := \sqrt{3}, \quad a_{n+1} := \sqrt{3 + 2a_n}$$

monotonitás: szigorúan monoton növekedés triviálisan látszik
 korlátosság: felső korlátra sejtés a 3, bizonyítás teljes indukcióval
 határérték számítása:

$$A = \sqrt{3 + 2A} \rightarrow A_1 = 3, A_2 = \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$$

3. Végtelen sor összege

A végtelen sornak konvergencia, ha a részletösszegek sorozata konvergens!

Elméleti segítség:

- végtelen sor képlete:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- a sor n. részletösszege:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- a részletösszeg határértéke a sor összege:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = ?$$

ezt a határértéket kell kiszámolni az összeg meghatározásához

2 típusú végtelen sort vizsgáltunk

- mértani sor

ehhez felhasználandó a mértani sor részletösszegének határértéke:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q} \quad |q| < 1$$

egy végtelen összeg több mértani sor összegéből/szorzatából is állhat, ekkor a határértékeket is összeadni/szorozni kell

- egyéb/parciális törtes (erre nem nagyon mondtuk külön nevet)
 általános alakja (b és c 0 is lehet!):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{(n+b)(n+c)}$$

ez nem feltétlenül ilyen alakban szerepel egy feladatban, lehet, hogy algebrai átalakításokat kell végezni (például kiemelés, nevezetes algebrai azonosságok alkalmazása)

Feladatok:

- mértani sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} + 3^{2n}}{10^n}$$

2 sor összegéről van itt szó, ahol

$$q_1 = \frac{8}{10} \rightarrow |q_1| < 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n_1} = \frac{1}{1 - q_1} = \frac{1}{1 - 0,8} = 5$$

$$q_2 = \frac{9}{10} \rightarrow |q_2| < 1 \rightarrow \lim_{n_2 \rightarrow \infty} s_{n_2} = \frac{1}{1 - q_2} = \frac{1}{1 - 0,9} = 10$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n} + 3^{2n}}{10^n} = 15$$

- parciális törtekre bontás

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 5n} = \sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n(n-5)}$$

n. részletösszeg

$$\sum_{k=6}^n \frac{5}{k(k-5)}$$

Σ -ban lévő kifejezés parciális törtekre bontása

$$\frac{5}{n(n-5)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-5}$$

$$5 = A(n-5) + Bn$$

$$0 = An + Bn \rightarrow A = -B$$

$$-5A = 5 \rightarrow A = -1 \rightarrow B = 1$$

$$\frac{5}{n(n-5)} = \frac{-1}{n} + \frac{1}{n-5}$$

n. részletösszeg ekkor:

$$\sum_{k=6}^n \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n} \right)$$

a sor első és utolsó néhány tagját érdemes felírni, ebből látszik, hogy a tagok nagy része kiesik, az elején és végén marad valami

$$\sum_{k=6}^n \left(\frac{1}{n-5} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{7} - \frac{1}{12} + \dots - \frac{1}{n-11} -$$

$$- \frac{1}{n-6} + \frac{1}{n-10} - \frac{1}{n-5} + \frac{1}{n-9} - \frac{1}{n-4} + \frac{1}{n-8} - \frac{1}{n-3} + \frac{1}{n-7} -$$

$$- \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-6} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-5} - \frac{1}{n}$$

az elején és a végén is marad 5 elem (annyi elemnek nem szabad kiesnie mindkét oldalon, amennyi a különbség a 2 nevező között), ennek a határértéke

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{60}{60} + \frac{30}{60} + \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} = \frac{137}{60}$$

4. Végtelen sor konvergenciája

Elméleti segítség

- összehasonlító kritériumok
 - majoráns kritérium (nagyobb sorral konvergencia bizonyítása)

- minoráns kritérium (kisebb sorral divergencia bizonyítása)

az összehasonlító kritériumnál rendszerint valamilyen nevezetes sorral kell majorálni/minorálni (pl. $\sum \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n^2}$ típusúval, mértani sorral)

- gyökkritérium: $\sqrt[n]{|a_n|}$ határérték számításával állapítjuk meg a konvergenciát (gyenge)
- hányadoskritérium: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ határérték számításával állapítjuk meg a konvergenciát (gyenge)

Feladatok

- összehasonlító kritériumok

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1 - 2n}{\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{2n}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2 + 5n} + \sqrt{2n}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n^2} + \sqrt{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7n} + \sqrt{2n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

- gyökkritérium (rendszerint akkor alkalmazandó, ha egy egész kifejezés van az n. hatványon, vagy az n valamelyik hatványán)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^4} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^4}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-2} < 1 \end{aligned}$$

- hányadoskritérium (rendszerint olyankor alkalmazzuk, amikor egy törtet vizsgálunk, melyben csak egy szám/kifejezés van az n. hatványon; olyan törtet vizsgálunk, amelyben faktoriálisos kifejezések is szerepelnek)

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{3^n}{(n+1)^2}} &\rightarrow 3 > 1 \end{aligned}$$

hányadoskritériumot ott érdemes használni, ahol a tört felírása után egyszerűsíteni lehet olyan alakra, amelyről meg tudjuk állapítani a határértéket

5. Függvények, folytonosság

Elméleti segítség

- értelmezési tartomány és értékkészlet fogalmának ismerete
- injektív/bijektív/szürjektív fogalmának ismerete

- inverzfüggvény fogalma, összetett függvény fogalma
- folytonosság, szakadási helyek osztályozása

Feladatok

- értelmezési tartomány megállapítása

$$f(x) = \sin x \quad g(x) = \frac{1}{x+1}$$

értelmezési tartomány $\rightarrow$ hol értelmezhető a függvény?

$$f(x) = \sin x \rightarrow D_f = \mathbb{R} \text{ (sinx, cosx mindenhol értelmezhető, tgx és ctgx már nem!)}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ (tört nevezője nem lehet 0!)}$$

- injektívek ezek a függvények?
 - $f(x) = \sin x$ periodikus függvény 2π -vel, $f(x_1) = f(x_2)$ teljesül, ha $x_1 \neq x_2 \rightarrow$ nem injektív
 - $g(x) = \frac{1}{x+1}$ injektív
- összetett függvény

$$f \circ g = f(g(x)) = \sin \frac{1}{x+1}$$

$$g \circ f = g(f(x)) = \frac{1}{\sin x + 1}$$

- folytonosság vizsgálat, függvényábrázolás

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x < 0 \\ (x+1)^3 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

folytonosság vizsgálatához bal- és jobb oldali határértékeket számolunk a lehetséges szakadási helyeken

ebben az esetben ez az $x = 0$ pont

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^3 = 1$$

a 2 határérték különbözik $\rightarrow x = 0$ elsőfajú szakadási hely

függvény ábrázolása:

- $(-\infty; 0)$ intervallumon $(x-1)^3$ ábrázolása (direkt behelyettesítéssel, vagy x^3 -ből kiindulva)
- $[0; +\infty)$ intervallumon $(x+1)^3$ ábrázolása (direkt behelyettesítéssel, vagy x^3 -ből kiindulva)