

1. (8 pont) Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden természetes számra:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Írja fel a bal oldalon szereplő kifejezést tömör (zárt) formában.

2. (12 pont) Mi a határértéke az alábbi számsorozatoknak?

$$(a) \quad a_n = \frac{\sqrt[n]{n^2} \cdot \cos(n^2)}{n+1} \quad (b) \quad b_n = \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{2n+3}$$

3. (12 pont) Konvergensek-e az alábbi számsorok? Ha igen, mennyi a sor összege?

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(n+1)!} \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

4. (12 pont) Legyenek $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sqrt{x-1}$, $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Írja fel az alábbi függvényeket, és adja meg értelmezési tartományukat:

$$g \circ f(x) = ? \quad h \circ g(x) = ?$$

$g \circ f$ és $h \circ g$ invertálhatók-e? Amelyik igen, írja fel az inverzét.

5. (6 pont) Vizsgálja meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényt, és ábrázolja:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{ha } x < 0 \\ x+3 & \text{ha } 0 \leq x \leq 1 \\ 6-2x & \text{ha } 1 < x \end{cases}$$

JÓ MUNKÁT!

