

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyváltozós valós függvények bal- és jobb oldali határértékét a megadott x_0 helyen:

$$192. f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & \text{ha } x \leq 1; \\ 3x - 5, & \text{ha } 1 < x; \end{cases} \quad x_0 = 1,$$

$$193. f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}; \quad x_0 = 1,$$

$$194. f(x) = 3 + \frac{1}{1 + 7^{\frac{1}{1-x}}}; \quad x_0 = 1,$$

$$195. f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}; \quad x_0 = 0,$$

$$196. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}; \quad x_0 = 0,$$

$$197. f(x) = \frac{5}{(x - 2)^3}; \quad x_0 = 2,$$

$$198. f(x) = \frac{2(1 - x^2) + |1 - x^2|}{3(1 - x^2) - |1 - x^2|}; \quad x_0 = 1.$$

Függvények folytonossága

D 8.11 Az egyváltozós valós f függvényt **folytonosnak** nevezzük az x_0 helyen (pontban), ha f értelmezve van az x_0 helyen, van határértéke az x_0 helyen és $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Hasonlóan értelmezhető az f függvény bal oldali, illetve jobb oldali folytonossága. (A definícióban határérték helyett bal oldali, illetve jobb oldali határértéket veszünk.)

T 8.12 Adott pontban folytonos függvények összege, különbsége és szorzata is folytonos ebben a pontban; két ilyen függvény hányadosa is folytonos, ha az osztó nem zérus az adott pontban.

D 8.13 Ha az f függvény az x_0 helyen (pontban) folytonos, akkor azt is szokás mondani, hogy x_0 az f **folytonossági helye**. Ha viszont az f függvény az x_0 helyen nem folytonos, de az x_0 valamely környezetének minden pontjában folytonos, akkor az x_0 -t f **szakadási helyének** nevezzük.

A szakadási helyek típusai:

x_0 **hézagpont**, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ létezik, de az x_0 helyen a függvény nincs értelmezve; az x_0 pontban **megszüntethető szakadása** van f -nek, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ létezik, $f(x_0)$ is létezik, de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

az x_0 pontban **lényeges szingularitása** van, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nem létezik. A lényeges szingularitás fontos speciális esete a pólus: Akkor mondjuk, hogy az x_0 helyen **pólusa** van a függvénynek, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$.

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy hol folytonosak az alábbi függvények. Ha a függvényeknek szakadási helyeik vannak, akkor állapítsuk meg azok típusát:

$$199. \bullet f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6},$$

$$201. f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 7},$$

$$203. \bullet f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}},$$

$$205. \bullet f(x) = x + \frac{x+2}{|x+2|},$$

$$207. \bullet f(x) = \frac{5x^2 - 3x}{2x},$$

$$209. \bullet f(x) = \frac{1}{\sin 2x},$$

$$211. \triangleright f(x) = \text{Ent } 2x - 2x + 2,$$

$$213. \triangleright \text{sgn } |\sin x|,$$

$$215. \triangleright f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$217. \triangleright f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}, & \text{ha } x \neq 2k\pi; \\ 0, & \text{ha } x = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}). \end{cases}$$

$$200. f(x) = \frac{1}{x^2 - 9},$$

$$202. f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2(x-3)^2},$$

$$204. f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}},$$

$$206. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ha } x \leq 1; \\ \frac{2}{x-1}, & \text{ha } 1 < x, \end{cases}$$

$$208. f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x},$$

$$210. \bullet f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x},$$

$$212. \bullet \text{sgn } |x^4 + x^2|,$$

$$214. f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ha } x \leq 0; \\ (1 - x)^2, & \text{ha } 0 < x \leq 2; \\ 3 - x, & \text{ha } 2 < x, \end{cases}$$

$$216. \star f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{ha } x \in \mathbf{Q}; \\ 4 - 2x, & \text{ha } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}, \end{cases}$$

Határozzuk meg — ha lehetséges — az a és b paraméterek értékét úgy, hogy a következő függvények mindenütt folytonosak legyenek:

$$218. \bullet f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0; \\ a, & \text{ha } x = 0, \end{cases}$$

$$219. f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & \text{ha } x \neq -1; \\ a, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$$

$$220. \bullet f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, & \text{ha } 0 < x; \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, \end{cases}$$

$$221. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{ha } x \leq 0; \\ a(x-1), & \text{ha } 0 < x, \end{cases}$$

$$222. \bullet f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & \text{ha } x \leq 0; \\ ax + b, & \text{ha } 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{ha } 1 \leq x, \end{cases}$$

$$223. f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq 1; \\ x^2 + ax + b, & \text{ha } 1 < |x|, \end{cases}$$

$$224. \bullet f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1}, & \text{ha } |x| \neq 1; \\ a, & \text{ha } x = -1; \\ b, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$$

$$225. \bullet f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos \frac{x}{2}}{\sin x}, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], x \neq 0, x \neq \pi; \\ a, & \text{ha } x = 0; \\ b, & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi függvények szakadási helyeiken folytonosak-e balról vagy jobbról:

$$150.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} \cos x - 1},$$

$$151.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}.$$

Felhasználva a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket, vizsgáljuk meg léteznek-e az alábbi határértékek; ha igen, számítsuk ki azokat!

$$152.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x},$$

$$153.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x},$$

$$154.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x} \quad (\beta \neq 0),$$

$$155.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x},$$

$$156.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2},$$

$$157.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x},$$

$$158.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2},$$

$$159.^{\star} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{\sin^2 x},$$

$$160.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3},$$

$$161.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right),$$

$$162.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x},$$

$$163.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x},$$

$$164.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2},$$

$$165.^{\triangleright} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{\pi}{x}.$$

Számítsuk ki a következő függvényhatárértékeket (a **7.164** — **7.166** feladatok és a függvényhatárérték Heine-féle definíciója (**D 8.4**) alapján):

$$166.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{7x},$$

$$167.^{\bullet} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{3x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + 2 \right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^3 - \frac{x^3}{2} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Feladatok

$$6.19 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$6.30 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{3x^2} \right), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

$$6.20 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$6.31 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{x - 2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$6.21 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$6.32 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2 - x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$6.22 \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 6x}{x^3 - 216}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{6\}$$

$$6.33 \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 - 6x}{x^2 - 36}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-6; 6\}$$

$$6.23 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - x^2}{x^3 - 4x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$$

$$6.34 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; -1\}$$

$$6.24 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$6.35 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-3; 0\}$$

$$6.25 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{x}}{2 - x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$6.36 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - x^2}{x^3 - 4x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$$

$$6.26 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$6.37 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 8x + 8}{x^2 - 4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-2; 2\}$$

$$6.27 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1 - x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$6.38 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x}{2 - x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$$6.28 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{1 - x^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$

$$6.39 \quad \lim_{x \rightarrow -6} \frac{6x - x^2}{x^2 - 36}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-6; 6\}$$

$$6.29 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{-1; 1\}$$