Teljes indukció

D 1.5 *A* **teljes indukció** *a direkt bizonyítás egyik fontos típusa. Jelöljön $A(n)$ olyan állítást, amely az n egész számtól függ. A bizonyítás két lépésből áll. Először megmutatjuk, hogy van olyan n_0 egész szám, hogy az $A(n_0)$ állítás igaz. Azután feltesszük, hogy valamely n egész számra $A(n)$ igaz, s ennek alapján bebizonyítjuk, hogy $A(n+1)$ is igaz. Ezekből már következik, hogy $A(n)$ igaz minden $n \geq n_0$ esetben.*

Feladatok

Teljes indukcióval bizonyítsuk be, hogy a következő állítások igazak, ha az n pozitív egész szám nagyobb vagy egyenlő valamely n_0 pozitív egész számnál (adjuk meg a legkisebb ilyen n_0-t):

103.• $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, **104.** $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$,

105.• $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

106. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = 1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$,

107.▷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2 = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$,

108. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)k^2=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$, **109.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}=\frac{n}{4n+1}$,

110. $\displaystyle\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$,

111. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

112. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\ldots(k+t-1)=\frac{n(n+1)\ldots(n+t)}{t+1}, \quad t\in\mathbf{N}^+$,

113. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, **114.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(k!)=(n+1)!-1$,

115.• $\displaystyle\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, **116.**▷ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}>\frac{13}{24}$,

117.▷ $\displaystyle\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$,