

1. Vizsgabeugró megoldással

Tegyük fel hogy ξ egy diszkrét valószínűségi változó, a következő eloszlással:

ξ	0	1	2	3
$P(\xi = k)$	$\frac{3\theta}{4}$	$\frac{(1-\theta)}{2}$	$\frac{\theta}{4}$	$\frac{(1-\theta)}{2}$

Egy 12 elemű mintavétel a következő eredményt adja: (1,0,2,1,3,0,1,0,3,1,3,3). Mi lesz θ ML becslése?

Megoldás.

$$\begin{aligned}
 L(\theta) &= P(\xi = 1)P(\xi = 0)P(\xi = 2)P(\xi = 1) \dots P(\xi = 3) \\
 L(\theta) &= \left(\frac{3\theta}{4}\right)^3 \left(\frac{(1-\theta)}{2}\right)^4 \left(\frac{\theta}{4}\right) \left(\frac{(1-\theta)}{2}\right)^4 \\
 l(\theta) &= \log L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log P(x_i|\theta) \\
 &= 3 \left(\log \frac{3}{4} + \log \theta \right) + 4 \left(\log \frac{1}{2} + \log(1-\theta) \right) + \\
 &\quad + \left(\log \frac{1}{4} + \log \theta \right) + 4 \left(\log \frac{1}{2} + \log(1-\theta) \right) \\
 &= 4 \log \theta + 8 \log(1-\theta) + C
 \end{aligned}$$

$$\frac{dl(\theta)}{d\theta} = \frac{4}{\theta} - \frac{8}{1-\theta} = 0$$

$$4(1-\theta) = 8\theta \rightsquigarrow \hat{\theta} = \frac{1}{3}$$