

Funkcionálanalízis tételjegyzék

2017. május

1. **Metrikus tér.** Példa: diszkrét metrika. **Normált tér.** Norma és metrika kapcsolata (B). **Skalár-szorzat tér.** Skalárszorzat és norma kapcsolata (B). **Sorozatterek:** ℓ^p , ezek kapcsolata egymással (B). **Függvényterek:** $C([a, b])$, lehetséges normák.
2. Metrikus terek topológiája. **Nyílt és zárt halmaz.** **Sorozat konvergenciája.** Metrikus terek között értelmezett **függvény folytonossága.** Kompakt és sorozatkompakt halmaz. Kompakt halmaz véges dimenzióban (Heine-Borel tétel (B)), és végtelen dimenzióban. Példák.
3. Szeparábilis metrikus tér. Példa szeparábilis és nem szeparábilis térre. **Teljes metrikus tér.** Hibert tér, Banach tér. $C([a, b])$ teljessége ill. nem teljessége különböző normák mellett (B). Vektortér dimenziója. Példa véges és végtelen dimenziós terekre.
4. Mérhető tér, mérték. Mértéktér. Példa: számláló mérték. Lebesgue mérték bevezetése \mathbb{R} -ben. Lebesgue-mérhető halmazok jellemzése. **Nullmértékű halmazok,** ezek struktúrája. **Cantor halmaz** $[0, 1]$ -ben, tulajdonságai (B).
5. Mérhető függvények, alaptulajdonságok (B). **Egyszerű függvények.** *Majdnem mindenütt* tulajdonság, ekvivalenciareláció (B). Lebesgue integrál bevezetése, alaptulajdonságok. **Integrálhatóság feltétele.** (B) Lebesgue- és Riemann integrál kapcsolata. Konvergencia tételek.
6. $\mathcal{L}^p(\mathbf{R})$ terek, $1 \leq p < \infty$ és $R \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{L}^p(R)$ és $\mathcal{L}^q(R)$ kapcsolata véges ill végtelen mértékű R mellett (B). Lényegében korlátos függvények, ezek jellemzése. $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{R})$ tér. Riesz tétel.
7. $\mathcal{L}^2(R)$, mint Hilbert tér. Lineárisan független függvényrendszer. **Ortonormált függvényrendszer,** példa $\mathcal{L}^2[-\pi, \pi]$ -ben. **Teljes függvényrendszer.** Ortogonalizáció (B). ON bázis. Egy ortonormált polinomrendszer: Legendre-polionomok.
8. Általános Fourier analízis $\mathcal{L}^2(R)$ -ben. Fourier együtthatók meghatározása (B). Parseval egyenlőség és általánosítása (B). **Riesz-Fisher tétel.** $\mathcal{L}^2(\mathbf{R})$ és ℓ^2 izometriája.
9. Általános $\mathcal{L}^2_\rho(R)$ terek adott ρ súlyfüggvénnyel. **ON polinomrendszerek.** Példák: Csebisev- és Hermite- polinomok, ezek jellemzése (B). Egy ON függvényrendszer: Haar rendszer.
10. Absztrakt lineáris operátorok. **Folytonosság, jellemzése** (B). Korlátosság, annak kapcsolata a folytonossággal (B). **Operátor normája.** Példák: \mathbb{R}^n -ben, ℓ^2 -ben, $C([a, b])$ -ban. $\mathcal{B}(X, Y)$ mint **normált tér.** Teljesség.

11. Folytonos lineáris operátorok *Banach térben*. Operátorok szorzata. **Inverz operátor. Egy fel-tétel inverz létezésére.** (B). Inverz operátorok tulajdonságai. Invertálható operátorok halmaza. **Spektrum.** Kapcsolat a sajátértékekkel. Operátor spektrumának alaptulajdonságai (B). Példák.
12. Lineáris funkcionál, mint absztrakt lineáris operátor. **Korlátos lineáris unkcionál normája.** Példák függvényterekben. **Duális tér.** Példák: \mathbb{R}^n különböző normák mellett (B), ℓ^p . Második duális tér. Reflexív terek. Gyenge és erős konvergencia, ezek kapcsolata (B).
13. Funkcionálok és operátorok Hilbert térben. Riesz reprezentációs tétel. **Hilbert tér duális tere.** **Lineáris operátor adjungáltja**, ennek létezése (B). Példa véges és végtelen dimenziós Hilbert térben. Önadjungált operátor. Példák: ortogonális vetítés, jellemzése (B).
14. **Disztribúciók**, mint speciális lineáris operátorok, Kapcsolat a közönséges függvényekkel. **Dirac delta.** Reguláris disztribúció. Disztribúció deriváltja, motiváció (B). Példa: $f(x) = \text{sgn}(x)$ esetén T_f disztribúció deriváltja (B). Lokálisan integrálható függvény gyenge deriváltja. Példa: $f(x) = |x|$ gyenge deriválja (B).
15. **Egy példa.** Operátorok alkalmazása QM-ban: Egyetlen részecske mozgásának és momentumának együttes határozatlanságaira vonatkozó Heisenberg féle becslés, ennek bizonyítása (B).