

Analízis I. feladatsor.

1.)-5.) Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy

1.) (48)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

3.)

$$\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2$$

4.)

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

5.)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

6.)-10.) Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy melyik konvergens, melyik divergens és a konvergenseknek adja meg a határértékét:

6.) (121) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}.$

7.) (122) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}.$

8.) (119) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}.$

9.) (128) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$

10.) (129) $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3}$.

11.)-13.) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

11.) (158) $a_n = \frac{10^n}{n!}$.

12.) (160) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

13.) (172) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$.

14.)-19.) Írja fel az alábbi sorok n -dik részletösszegét és ha konvergens, adja meg a sor határértékét:

14.) (S1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

15.) (S2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$.

16.) (S3) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$.

17.) (S4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

18.) (S26) $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$.

19.) (S32) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k}{6^k}$.

20.)-24.) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergenssek vagy divergenssek:

20.) (S52) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

21.) (S55) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}$.

$$22.) \text{ (S59) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}.$$

$$23.) \text{ (S83) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}.$$

$$24.) \text{ (S87) } \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right).$$

25.)-32.) Számítsa ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

$$25.) \text{ (367) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}.$$

$$26.) \text{ (369) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}.$$

$$27.) \text{ (375) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$$

$$28.) \text{ (382) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5}.$$

$$29.) \text{ (399) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

$$30.) \text{ (405) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$$

$$31.) \text{ (410) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$32.) \text{ (414) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

33.)-36.) Deriválja az alábbi függvényeket:

$$33.) \text{ (746) } f(x) = (x^3 + 1)^2.$$

$$34.) \text{ (751) } f(x) = (x^2 + 2) \sin \sqrt{x+3}.$$

$$35.) \text{ (765) } f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

36.) (753) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2x$.

37.)-39.) Számolja ki az alábbi határértékeket:

37.) (897) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

38.) (909) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$.

39.) (900) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg} x$.

40.)-41.) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény grafikonját:

40.) (933) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

41.) (940) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

42.)-44.) Irja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó Taylor polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal:

42.) (1002) $f(x) = e^x$, $T_1(x) = ?$

43.) (1002) $f(x) = \sin x$, $T_5(x) = ?$

44.) (1006) $f(x) = \ln x$, $T_5(x) = ?$

45.)-47.) Számítsa ki az alábbi függvény közelítő értékét az adott x_1 pontban a megadott fokú Taylor polinom segítségével és becsülje meg a hibát:

45.) (1008) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_1 = 10$, $T_1(x)$.

46.) (1010) $f(x) = \cos x$, $x_1 = 28^\circ$, $T_1(x)$.

47.) (1013) $f(x) = \ln x$, $x_1 = 1.3$, $T_4(x)$.

48.)-54.) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényét:

$$48.) \text{ (1149) } f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

$$49.) \text{ (1156) } f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

$$50.) \text{ (1159) } f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}.$$

$$51.) \text{ (1170) } f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}.$$

$$52.) \text{ (1173) } f(x) = x \cdot \sin(x^2).$$

$$53.) \text{ (1179) } f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}.$$

$$54.) \text{ (1198) } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

55.)-59.) Számítsa ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumban:

$$55.) \text{ (1294) } \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$56.) \text{ (1300) } \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$57.) \text{ (1297) } \int_0^{\pi/4} x \cos x dx.$$

$$58.) \text{ (1306) } \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx.$$

$$59.) \text{ (1307) } \int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx.$$

60.)-62.) Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, és ha igen, számolja ki az integrál értékét:

$$60.) \text{ (1432) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx.$$

61.) (1439) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

62.) (1441) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$