

Komplex függvénytan gyakorló feladatok

2021

1. Függvények megadása

F1. Írjuk fel a függvény kanonikus alakját:

(a) $f(z) = z^2$

(b) $f(z) = (z + 1)^2$

(c) $f(z) = \frac{1}{z}$

(d) $f(z) = \frac{1}{z^2}$

(e) $f(z) = e^{z+1}$

(f) $f(z) = e^{2z}$

(g) $f(z) = (1 + i)z$

(h) $f(z) = \frac{z}{1 + i}$

F2. Határozzuk meg, hogy a megadott komplex függvény a konkrét tartománynak mit feleltet meg. Rajzoljuk le.

(a) Az $f(z) = 2z$, $D = \{z : |z| = 1\}$

(b) $f(z) = \bar{z}$, $D = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$.

(c) $f(z) = \bar{z}$, $D = \{z : \text{Re}(z) > 0\}$.

(d) $f(z) = (1 + i)z$, $D = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$.

(e) $f(z) = -iz - 1$, $D_0 = \{z : |z| = 1\}$ és $D_1 = \{z : |z| < 1\}$

(f) $f(z) = (-1 + i)z$, $D_0 = \{z : |z| = 1\}$ és $D_1 = \{z : |z| > 1\}$.

(g) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{z : \text{Re}(z) > 0\}$.

(h) $f(z) = \frac{1}{z}$, $D = \{z : \text{Im}(z) \geq 1\}$.

2. Differenciálhatóság

D1. Vajon differenciálható-e az alábbi függvény? Vajon hol differenciálható?

(a) $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$.

(b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

(c) $f(z) = \operatorname{Re}(z)$.

(d) $f(z) = (z + 1)^2$.

(e) $f(z) = \bar{z}^2$

(f) $f(z) = 2x + xy^2i$.

(g) $f(z) = e^x(\cos(y) - i \sin(y))$

(h) $f(z) = z^2$.

(i) $f(z) = x^3 - (y - 1)^3i$

(j) $f(z) = 1 - iz$

(k) $f(z) = \frac{1}{z}$.

D2. Írja fel a függvény kanonikus alakját. Vajon differenciálható-e?

$$f(z) = |z|$$

D3. Harmonikus-e a következő függvény?

(a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

(b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

(c) $u(x, y) = \operatorname{sh}(x) \sin(y)$

(d) $v(x, y) = -\sin(x) \operatorname{ch}(y)$

(e) $v(x, y) = -\sin(x) \operatorname{ch}(y)$

D4. Harmonikus-e a következő függvény? Ha igen, keressük meg harmonikus társát (* és a megfelelő komplex függvényt.)

(a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$

(b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

(c) $v(x, y) = e^x \sin(y)$

D5. Harmonikus-e a következő függvény?

$$u(x, y) = \operatorname{sh}(x) \sin(y).$$

Ha igen, számítsa ki az analitikus komplex függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban.

D6. Harmonikus-e a következő függvény?

$$v(x, y) = -\sin(x) \operatorname{ch}(y).$$

Ha igen, milyen analitikus komplex függvény képzetes része?

D7. Milyen $C \in \mathbb{R}$ esetén lesz $v(x, y)$ egy analitikus függvény *képzetes része*?

(a) $v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$

(b) $v(x, y) = \operatorname{ch}(x) \cos(y)$

(c) $v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$. A kapott C esetén mi a harmonikus társa?

D8. Igazoljuk, hogy $u(x, y)$ egy analitikus függvény *valós része*:

(a) $u(x, y) = (x - 2)(y + 1)$

(b) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ Mennyi $f'(1 + i) = ?$

(c) $u(x, y) = (x - 2)(y + 1)$. Mennyi $f'(-i)$?

D9. Milyen C paraméter esetén lesz $u(x, y)$ egy analitikus függvény *valós része*?

(a) $u(x, y) = Cx^2y - y^3$.

(b) $u(x, y) = \ln(x^2 + Cy^2)$

(c) $u(x, y) = Cx^2y - y^3$. Mennyi a megfelelő $f(z)$ függvény deriváltja a $z_0 = 1 + i$ pontban?

3. Elemi függvények

E1. Számítsa ki az exponenciális függvény értékét:

(a) $e^{1+i} = ?$

(b) $e^{1+i\pi} = ?$

(c) $e^{1-i\pi} = ?$

(d) $e^{1-i} = ?$

E2. Számítsa ki a komplex logaritmus értékét.

(a) $\ln(1+i) = ?$

(b) $\ln(1-i) = ?$

(c) $\ln(\sqrt{3}+i) = ?$

(d) $\ln(-i) = ?$

(e) $\ln(-1) = ?$

(f) $\ln(-1+i) = ?$

E3. (*) $i^i = ?$