Funkcionálanalízis

Gyakorló feladatok

2017. május 4.

Ortogonális függvényrendszerek.

O1. Igazoljuk, hogy ha $f, g \epsilon \mathcal{L}^2[0,1]$ ortogonálisak, akkor $||f||^2 + ||g||^2 = ||f+g||^2$.

O2. Mutassuk meg, hogy a H_{2k}, $k = 1,2,3,4$ másodrendű Haar függvények ortonormált rendszert alkotnak.

O3. Az *n-dik másodfajú Csebisev polinom*:

$$U_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\ \arccos x\big)}{\sin(\arccos x)}, \qquad x\epsilon(-1,1).$$

(a) Írja fel az $U_n(x)$ polinomokat $n = 0,1,2$ esetben

(b) Igazolja, hogy U_0, U_1 és U_2 ortogonálisak $\mathcal{L}^2_\varrho(-1,1)$-ben $\varrho(x) = \sqrt{1-x^2}$ súlyfüggvényre.

O4. A *Rademacher rendszer* egy ON függvényrendszer $\mathcal{L}^2[0,1]$-ben, mely n-dik függvénye:

$$r_n(x) = \operatorname{sgn}\big(\sin(2^n\pi \cdot x)\big).$$

(a) Írja fel az $r_n(x)$ függvényeket $n = 0,1,2$ esetben.

(b) Igazolja, hogy r_0 és r_2 ortogonálisak $(0,1)$-ben.

O5. Bizonyítsuk be, hogy a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(nx), \qquad n\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}$$

teljes ortonormált rendszer $\mathcal{L}^2[0,\pi]$-ben.

O6. Az $\mathcal{L}^2_\varrho(\mathbb{R})$ teret tekintsük a $\varrho(x) = e^{-x^2}$ súlyfüggvény mellett.
Az n-dik *Hermite-féle polinom*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \qquad (n = 0,1,2,3,\ldots)$$

melyek ortogonális függvényrendszert alkotnak ebben a térben.

(a) Írjuk fel a $H_n(x)$ polinomokat $n = 0,1,2$ esetben.

(b) Igazoljuk, hogy H_0 és H_1 ortogonálisak.

(+) *(+3 pont)* Határozzuk meg H_j normáját, $j = 0,1,2$.

Korlátos lineáris operátor normája

N1. Jelölje $C_b(\mathbb{R})$ a korlátos és folytonos függvények terét a sup-normával. Igazoljuk, hogy az alábbi két operátor lineáris és folytonos:

(a) $(Tf)(t) = f(s+t)$, ahol $s\epsilon\mathbb{R}$ tetszőleges rögzített szám.

(b) (*2015. 2.Zh*) $(Sf)(t) = f(2t)$.

Határozzuk meg a fenti operátorok normáját.

N2. (*2015. 2.Zh pótlás*) Jelölje $X = C_p(\mathbb{R})$ a 2π szerint periodikus folytonos függvények terét a szokásos sup-norma mellett:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \ : \ x\epsilon\mathbb{R}\}.$$

Igazoljuk, hogy a

$$T : X \to X, \qquad (Tf)(x) = f(x/2)$$

operátor lineáris és korlátos. Határozzuk meg a normáját.

N3. Legyen $X = \mathbb{R}^3$ és $Y = \mathbb{R}^2$, mindkettőben az $\| \cdot \|_1$ normát tekintjük. Adott $A\epsilon\mathbb{R}^{2\times 3}$ mátrix esetén legyen $Tx = A \cdot x$. Határozzuk meg T normáját.

N4. $C[a,b]$-ben tekintsük a $Tf(s) = \displaystyle\int_a^b k(s,t)f(t)dt$ lineáris operátort.

(a) Speciális eset: $k(s,t) = \min\{s,t\}$.

(b) Másik speciális eset: $k(s,t) = s$.

Írjuk fel az operátorokat. Igazoljuk a korlátosságot. Határozzuk meg az operátorok normáját.

N5. Határozzuk meg a $T_1 : C[0,1] \to C[0,1]$ operátor normáját: $T_1 f(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)dt$.

N6. Határozzuk meg a $T_2 : C[0,1] \to C[0,1]$ operátor normáját: $T_2 f(s) = \displaystyle\frac{1}{s}\int_0^s f(t)dt$.

N7. Legyen $X = C[0,1]$, és a norma: $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$. Legyen $Y = C[0,1]$ egy másik normával: $\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \ : \ t\epsilon[0,1]\}$.

Igazoljuk, hogy az $I : X \to Y$ identitás operátor nem korlátos.

N8. Legyen $H = \mathbb{R}^2$ Hilbert tér és tekintsük a $T(x,y) = (x,-y)$ lineáris operátort.Igazoljuk, hogy korlátos. Határozzuk meg a normáját.

Korlátos lineáris operátor spektruma

S1. A $H = \mathcal{L}^2[0,1]$ Hilbert térben legyen $T : H \to H$ a $Tf = \alpha f$ skalárral való szorzás operátora. Mi ennek spektruma?

S2. Legyen $T : \mathcal{L}^2[0,1] \to \mathcal{L}^2[0,1]$ a következő operátor:

$$(Tf)(x) = \frac{f(x)}{x-2}.$$

Mi ennek spektruma?

S3. Legyen $T \epsilon B(\ell^2)$,

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_3, \frac{3}{4}x_4, \dots \right).$$

Határozzuk meg T spektrumát.

S4. Határozzuk meg T spektrumát, ha $T \epsilon B(\ell^2)$ az alábbi operátor:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots \right).$$

A spektrum mely pontjai sajátértékek is egyben?

S5. Legyen (φ_n) egy teljes ON rendszer a H Hilbert térben. Ha $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$, akkor a T operátor rendelje hozzá a $Tf := \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \varphi_{2n}$ elemet. Igazoljuk, hogy a $T : H \to H$ operátor

(a) $T \epsilon \mathcal{B}(H)$.

(b) $\|T\| = 1$.

(c) T projekció (azaz $T^2 = T$).

(d) Spektruma $\sigma(T) = \{0, 1\}$.