

FUNKCIONÁLANALÍZIS

Gyakorló feladatok

2017. március 22.

Metrikus tér, normált tér és skalárszorzat tér

N1. Metrikát definiálnak-e \mathbb{R} -en az alábbi függvények:

(a) $d(x, y) = \left| |x| - |y| \right|$

(b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

(c) $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$

N2. Metrikát definiálnak-e \mathbb{R}^2 -en az alábbi függvények? $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$.

(a) $d(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$,

(b) $d(x, y) = \min(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$,

N3. Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben az alábbi normát, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ rögzített számok:

$$\|x\| = \sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}}, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Igazoljuk, hogy ez valóban norma. Rajzoljuk fel az egységkört.

N4. (Pitagorasz tétel "megfordítva") Adott egy H Hilbert tér, benne két elem, $x, y \in H$. Tegyük fel, hogy $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. igazoljuk, hogy ekkor x és y ortogonálisak.

N5. (2015. Zh feladat) Legyen V a 3×2 dimenziós mátrixok tere. Igazoljuk, hogy ebben a vektortérben valóban normát definiál az alábbi képlet:

$$\|A\| := \max_{i=1,2,3} (|a_{i1}| + |a_{i2}|), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

N6. (2015. Javító-Zh feladat) Legyen V a 2×4 dimenziós mátrixok tere. Igazoljuk, hogy ebben a vektortérben valóban normát definiál az alábbi képlet:

$$\|A\| := \max_{i=1,2,3,4} (|a_{1i}| + |a_{2i}|), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

N7. (2016. Zh feladat) Normát definiálnak-e \mathbb{R}^2 -en az alábbi függvények? Igazolja.

$$\|(x, y)\|_a = \left| |x| + 5|y| \right|, \quad \|(x, y)\|_b = \left| |x| - 5|y| \right|, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Norma esetén további kérdések:

- (a) Milyen metrikát indukál?
- (b) Vázolja fel az origó középső egység sugarú kört.

N8. Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett folytonosan differenciálható függvények $C^1[0, 1]$ terét. Az alábbi kifejezések közül melyek lesznek normák ezen a vektortérben?

- (a) $N_1(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$,
- (b) $N_2(f) = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$,
- (c) $N_3(f) = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$,
- (d) $N_4(f) = |f(0)| + \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$.

N9. Az ℓ^1 sorozattérben tekintsük azokat a sorozatokat, melyekben csak véges sok 0-tól különböző tag van. Igazoljuk, hogy ezek sűrűn vannak ℓ^1 -ben. Mi következik ebből?
(+ Kérdés: Vajon ℓ^∞ -ben is igaz-e ez?)

N10. (2012. Zh feladat) Tekintsük az alábbi sorozat teret:

$$H = \{(x_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2(1+n^2) < \infty\}.$$

- (a) Igazoljuk, hogy ezen a téren skalárszorzat lesz: $\langle x, y \rangle_H := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n (1+n^2)$.
- (b) Igazoljuk, hogy $H \subset \ell^2$.
- (c) Igazoljuk, hogy a fenti skalárszorzattal indukált normára: $\|x\|_H \geq \|x\|_2$, ha $x \in H$.

Topológia metrikus terekben

- T1. Legyenek (N, d_N) metrikus tér, $A \subset N$ nyílt halmaz. Legyen $a \in A$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy $A \setminus \{a\}$ is nyílt.
- T2. Legyenek $f_n, f \in C[a, b]$. Igazoljuk, hogy ha $f_n \rightarrow f$ a $\|\cdot\|_{\max}$ -norma szerint, akkor $f_n \rightarrow f$ az $\|\cdot\|_1$ -norma szerint is. Igaz-e ez fordítva?
- T3. Az X halmazon a $d(x, y)$ diszkrét metrikát tekintjük. Igazoljuk, hogy (X, d) pontosan akkor szeparábilis, ha X megszámlálható elemszámú halmaz.
- T4. Legyen K véges elemszámú halmaz valamely metrikus térben. Igazoljuk, hogy kompakt.
- T5. (+) Legyen (X, d) egy kompakt metrikus tér, és legyen $\{U_i : i \in I\}$ az X egy nyílt fedése. Igazoljuk, hogy van olyan $r > 0$ szám, hogy bármely $x \in X$ esetén a $B_r(x)$ gömb benne van valamelyik U_i halmazban.

T6. (+) Legyen $X = (0, 1) \cup \{2\}$ a számegegyenes egy részhalmaza a szokásos $d(x, y) = |x - y|$ metrikával ellátva. A $(0, 1)$, $(0, 1) \cup \{2\}$, $\{2\}$, $(0, \frac{1}{2}]$ halmazok közül melyek nyíltak, illetve zártak az (X, d) metrikus térben?

T7. (2016. Zh feladat) Legyen $E \subset \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$, nullmértékű halmaz (azaz $m(E) = 0$).

- (a) Igazoljuk, hogy nincs belső pontja (azaz $\text{int}(E) = \emptyset$).
- (b) Lehet-e E nyílt? Ha igen, adjon példát.
- (c) Lehet-e E zárt? Ha igen, adjon példát.

Folytonos függvények metrikus terekben

F1. Legyenek (N, d_N) és (M, d_M) metrikus terek, $f : N \rightarrow M$ folytonos függvény. Igazoljuk, hogy

- (a) ha $G \subset M$ nyílt, akkor $f^{-1}(G) \subset N$ is nyílt.
- (b) ha $K \subset N$ kompakt, akkor $f(K) \subset M$ is kompakt.

F2. Tekintsük a Dirichlet függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Most kétféleképp fogunk ránézni:

- (a) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ közönséges valós függvény.
- (b) Az $M = [0, 1]$ alaptéren a diszkrét metrikát értelmezve, $f : (M, d) \rightarrow \mathbb{R}$ metrikus terek közti leképezés.

Folytonos-e f a kétféle nézőpontból?

Mérték. Mérhetőség

M1. Tekintsük a valós számoknak az alábbi részhalmazát, a szokásos euklideszi metrika mellett (ahol tehát $d(x, y) = |x - y|$):

$$H = \left\{ x = \frac{j}{2^k} : k \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq 2^k \right\}.$$

- (a) Ez a halmaz nyílt? Zárt? Kompakt?
- (b) Tekintsük \mathbb{R} -en a Lebesgue-mérhető halmazokat ill. a Lebesgue mértéket. Mérhető-e H ?
Ha igen, mennyi a mértéke?

M2. Legyen $E \subset \mathbb{R}$ nullmértékű halmaz. Igazoljuk, hogy nincs belső pontja.

M3. Legyen $H = \{x = \frac{p}{q}\sqrt{2} : p < q \in \mathbb{N}\}$. Vajon mérhető-e? Ha igen, mennyi a mértéke?

M4. Vegyük a következő speciális mérhető teret: Adott egy legalább két elemű halmaz X , a mérhető halmazok pedig $\mathcal{R} = \{\emptyset, X\}$. Milyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvények lesznek mérhetőek?

M5. (Korábbi Zh feladat) Tekintsük a $C \subset [0, 1]$ Cantor halmazt. Definiáljuk ennek átskálázott módosításait:

$$C^{(2k)} := \{2k \cdot x : x \in C\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Legyen továbbá

$$C^{(\infty)} := \bigcup_{k=1}^{\infty} C^{(2k)}.$$

Mérhető-e ez a halmaz? Ha igen, mennyi a mértéke?

Lebesgue integrál. Lebesgue terek

L1. Konvergál-e $\mathcal{L}^1(0, 1)$ -ben az alábbi függvénysorozat:

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nx}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L2. (+) (Markov-egyenlőtlenség) Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ integrálható nemnegatív függvény. Bizonyítsuk be, hogy $\forall c > 0$ esetén

$$m(\{x : f(x) \geq c\}) \leq \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} f \, dm, \quad .$$

L3. (+) Legyen $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}-1}$ és $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_1}$. Mennyi (pontonkénti határértéket tekintve):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n =? \quad \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n =?$$

Mit tapasztalhatunk? Miért nem alkalmazható a monoton konvergencia-tétel? Miért nem alkalmazható a dominált konvergencia-tétel?

L4. (+) (Hölder egyenlőtlenség) Ha $p \geq 1$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, akkor $f \in \mathcal{L}^p(X)$ és $g \in \mathcal{L}^q(X)$ esetén $fg \in \mathcal{L}^1(X)$, továbbá

$$\int_X |fg| \, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Igazoljuk ezt $p = q = 2$ esetén.

L5. (Korábbi Zh feladat) Az $L^p([0, 1])$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 1, 2$ esetén az alábbi függvények:

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = \begin{cases} q, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Számolja ki a függvények normáját, ahol értelmezett.

L6. (Korábbi Zh feladat) Az $\mathcal{L}^p((0, 1])$ függvénytérhez tartoznak-e $p = 1, 2$ esetén az alábbi függvények:

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x), \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{m}, & x \in \mathbb{Q}, \quad x = \frac{n}{m}, \quad n, m \in \mathbb{N} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Számolja ki a függvények normáját, ahol értelmezett.