

Név:

FUNKCIONÁLANALÍZIS

VIZSGA ZH

2016. június 17.

Munkaidő: 60 perc

Az elégségeshez 50 pont szükséges.

1. (30 p.) Két fajta *teljesség* fogalom szerepelt. Írja le ezeket a definíciókat:

(a) Az (M, d_M) metrikus tér teljes. Írjon példát teljes metrikus térre.

(b) Adott egy $(f_n) \subset \mathcal{L}^2([a, b])$ függvényrendszer, ez mikor teljes?

2. (20 p.) Definiálja az alábbi sorozattereket: ℓ^1 , ℓ^2 , ℓ^∞ .

(a) Mi a norma ezekben a terekben?

(b) Mondjon példát 1-1 sorozatra mindhárom térben (különbözőket!).

(c) Milyen kapcsolat van a fenti terek között?

3. (20 p.) Legyen $R = [0, 1]$. Definiálja az alábbi függvénytereket:

$$\mathcal{L}^1(R), \quad \mathcal{L}^2(R), \quad \mathcal{L}^\infty(R).$$

- (a) Mi a norma ezekben a terekben?
- (b) Mondjon példát 1-1 függvényre mindhárom térben (különbözőket!).
- (c) Melyikben van skalárszorzat, hogyan értelmezzük?

4. (30 p.) Legyen X egy Banach tér.

- (a) Írja fel $\mathcal{B}(X)$ definícióját. (Mik az elemek, mi a struktúra, és milyen műveletek vannak.)
- (b) Adott $T \in \mathcal{B}(X)$ spektrumát hogyan értelmezzük?
- (c) Konkrét esetben, ha $Tx = -x$, akkor $\sigma(T) = ?$

+1 (+5 p.) Adjon meg egy olyan $R \subset \mathbb{R}$ halmazt a számegegyenesen, melynek Lebesgue mértéke 1.

+2 (+5 p.) Írjon példát olyan normált térre, ami nem Banach tér.