Matematikai Analízis III.
Gyakorló feladatok

2020. december

Variációszámítás

V1. Határozzuk meg azt az $u : [0,1] \to \mathbf{R}$ differenciálható függvényt, melyre $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, és adott L ívhossz mellett a függvény alatti terület maximális.

(a) Adjuk meg az $u(x)$ függvényt $L = \pi$, majd $L = \frac{2\pi}{3}$ esetén.

(b) *Extra kérdés*: Milyen L esetén van megoldása a feladatnak?*

V2. Határozzuk meg a síkon a $P_0(0,0)$ és $P_1(2,0)$ pontokat összekötő vonalak közül a legrövidebbet azok közül, melyek alatti terület adott T szám.

(a) Adjuk meg $y(x)$ függvényt $T = \frac{\pi}{2}$, majd $T = \frac{\pi}{3}$ esetén.

(b) *Extra kérdés*: Milyen T esetén van megoldása a feladatnak?*

V3. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ annak a hengernek a felszíne, melynek alapja az (x,y) síkbeli egységkör. Adott két pont a hengeren: $(0,1,0)$, és $(-0,1,1)$. Határozzuk meg az őket összekötő legrövidebb görbét a hengerpaláston.

V4. Az egységgömb felszínén adott két pont $P_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ és $P_2(0,0,1)$. Határozzuk meg a gömb felszínén a két pontot összekötő legrövidebb görbét.

V5. Adott $D \subset \mathbf{R}^2$ simahatárú összefüggő tartomány. Ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius függvénye az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint_D |\,\mathrm{grad}\ \phi(\mathrm{x},\mathrm{y})\,|^2 \mathrm{d}(\mathrm{x},\mathrm{y}).$$

V6. Adott $D \subset \mathbf{R}^2$ simahatárú összefüggő tartomány. Ezen tekintünk $\phi : D \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható függvényeket rögzített peremfeltétel mellett. Mi lesz a stacionárius függvénye az alábbi funkcionálnak:

$$I(\phi) = \iint\limits_D \left(\phi'_x(x,y) + \phi'_y(x,y)\right) \mathrm{d}(x,y).$$

V7. Legyen $G \subset \mathbb{R}^3$ az a sík, melynek egyenlete $x + y + z = 1$. Ezen a síkon adott két pont $P_1(1,0,-2)$ és $P_2(-2,0,3)$. Határozzuk meg a pontokat összekötő legrövidebb görbét a síkon.

PDE transzport egyenlet

T1. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű transzport-egyenleteket:

(a)

$$u'_t + u'_x = 0, \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

(b)

$$u'_t + u'_x = x - t, \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

(c)

$$u'_t + 2u'_x = x^2 + 4tx, \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \qquad u(x,0) = 0.$$

(d)

$$u'_t + 2u'_x = x\cos(t), \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \qquad u(x,0) = e^x.$$

T2. Oldjuk meg az elsőrendű transzport-egyenletet:

$$\begin{aligned} u'_t(t,x) - u'_x(t,x) &= (t+x)^2 \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \\ u(0,x) &= x\cos x \end{aligned}$$

T3. Oldjuk meg az alábbi transzport-egyenletet:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + 2 \cdot u_x(x,t) &= \qquad (t > 0,\ x \epsilon \mathbb{R}), \\ u(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

PDE Laplace egyenlet

L1. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását:

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

az alábbi peremfeltételekkel:

$$u(0,y) = 0, \qquad u(1,y) = 0.$$

$$u(x,1) = 0, \qquad u(x,0) = 1$$

L2. Oldjuk meg a Laplace egyenletet a $(0,1) \times (0,1)$ négyzeten az adott peremfeltételekkel:

$$u(0,y) = 0, \qquad u(1,y) = 0$$

$$u(x,1) = \sin(2\pi x), \qquad u(x,0) = 1$$

L3. Legyen $\Omega = \{(x,y) \ : \ x, y > 0\}$ (egy síknegyed). Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \qquad x > 0 \\ u(0,y) &= \sin(y), \qquad y > 0 \\ \lim_{x\to\infty} u(x,y) &= 0, \qquad \forall y \geq 0. \end{aligned}$$

L4. Legyen $\Omega = \{(x,y) \ : \ 0 < x < \pi,\ y > 0\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u(0,y) &= 0, \qquad \forall y > 0 \\ u(\pi,y) &= 0, \qquad \forall y > 0 \\ u(x,0) &= \sin(2x), \qquad 0 < x < \pi \\ \lim_{y\to\infty} u(x,y) &= 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

L5. Legyen $\Omega = \{(x, y) \ : \ x > 0, 0 < y < \pi\}$. Határozzuk meg a Laplace egyenlet megoldását a következő peremfeltételek mellett:

$$\begin{aligned} u'_y(x,0) &= 0, \qquad \forall x > 0 \\ u'_y(x,\pi) &= 0, \qquad \forall x > 0 \\ u(0,y) &= \cos(2y), \qquad 0 < x < \pi \\ \lim_{x\to\infty} u(x,y) &= 0 \qquad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

L6. Legyen $\Omega = (0, \pi) \times (0, \pi)$ síkbeli nyílt négyzet-tartomány. Oldjuk meg a Laplace egyenletet az adott peremfeltételek mellett:

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0, \qquad (x,y)\epsilon\Omega,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,\pi) = 0, \qquad 0 < x < \pi$$

$$u(0,y) = 0, \qquad u(\pi,y) = \sin(3y) - 3\sin(y), \qquad 0 < y < \pi.$$

L7. Oldjuk meg A Laplace egyenletet:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0 \qquad x^2 + y^2 < 4 \\ u(x,y) &= y^2 \qquad x^2 + y^2 = 4. \end{aligned}$$

Segítség. A Laplace egyenletet polárkoordinátákban:

$$w''_{rr} + \frac{1}{r^2} w''_{\theta\theta} + \frac{1}{r} w'_r = 0.$$

PDE hővezetés egyenlete

H1. Tekintsük a hővezetés egyenletét végtelen rúdban:

$$u'_t = u''_{xx}, \qquad x\epsilon\mathbf{R},\ t > 0.$$

Kezdeti hőmérséklet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ \\ 0, & x < 0 \text{ vagy } x > 1 \end{cases}$$

Írjuk fel a megoldást. Hogyan lehet interpretálni a kapott eredményt?