Matematikai Analízis III.

Gyakorló feladatok az 1. Zh-hoz
2020. október

Vektoranalízis

V1. Legyenek $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható függvények, valamint $c \epsilon \mathbb{R}^3$. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási" szabályokat:

1. $\mathrm{grad}(\mathrm{c}^\mathrm{T}\mathrm{F}) = \underline{\mathrm{c}}^\mathrm{T}(\mathrm{DF})$.
2. $\mathrm{div}(\mathrm{f}\,\mathrm{F}) = \langle \mathrm{F}, \nabla \mathrm{f} \rangle + \mathrm{div}\ (\mathrm{F})\,\mathrm{f}$.

V2. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ f = \triangle f,$$

ahol $\triangle$ a Laplace operátor.

V3. Legyenek $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármezőkés $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormezők. Igazoljuk az alábbi "szorzat deriválási szabályok"-at:

1. $\nabla(fg) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$.
2. $\mathrm{rot}\ (fF) = \nabla f \times F + f \cdot\ \mathrm{rot}\ (F)$.
3. $\mathrm{div}\ (F \times G) = \langle G, \mathrm{rot}\ (F) \rangle - \langle F, \mathrm{rot}\ (G) \rangle$.

V4. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható skalármező és $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. A G vektormező úgy származik az F-ből, hogy minden koordinátájához hozzáadjuk f-t. Határozzuk meg a G vektormező divergenciáját F és f deriváltjainak segítségével.

Vonalintegrál. Felületi integrál. Integrálátalakító tételek

F1. Számolja ki az alábbi felületi integrált:

$$\iint_S F(x,y,z)\ d\mathbf{S}, \qquad \text{ahol} \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

és S az a zárt felület, melyet alulról az $z = x^2 + y^2$ paraboloid, felülről a $z = 1$ sík határol. Az $\underline{n}$ normálvektor mutasson mindig felfelé.
Magyarázza meg geometriailag, hogy miért lesz negatív a kapott érték.

F2. Legyen S az a felület, melyet alulról az $z^2 = x^2 + y^2$ kúp, felülről a $z = 1$ sík határol. Számolja ki az alábbi felületi integrált:

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\mathbf{S}, \qquad \text{ahol} \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix},$$

F3. Legyen $F(x, y) = (2y, x)$. Határozza meg ennek vonalintegrálját az origó körüli egységkör mentén valamelyik módon:

1. közvetlenül, vagy
2. a Green tétel segítségével kettős integrálként.

$\boxed{\text{F4.}}$ Lássuk be, hogy az $F(x, y, z) = (x, y, z)$ vektormező fluxusa bármely S sima zárt felületre megegyezik a közrezárt térfogat 3-szorosával.

S1. Igazolja a Stokes tételt a következő esetben: M az egység sugarú gömb $x > 0$ félsíkba eső félgömbjének felülete, ∂M ennek határa, és $F(x, y, z) = (x, -z, y)$.

$\boxed{\text{S2.}}$ Igazolja a Stokes tételt abban az esetben, ha S az origó középű egységkörnek az a fele, melyben $y \geq 0$. $\underline{n}$ az y tengely pozitív részével hegyesszöget zár be, és $F(x, y, z) = (y, 2x, x)$.

S3. Mondja ki és igazolja a Stokes tételt abban az esetben, ha $F(x, y, z) = (y, z, x)$ és S az $x + y + z = 0$ sík azon darabja, melyet az $x^2 + y^2 = 1$ henger metsz ki belőle (ellipszis).

S4. Igazolja a Stokes tételt a következő esetben: M az egység sugarú gömb felső félgömbjének felülete ("gömbhéj"), ∂M ennek határa, és

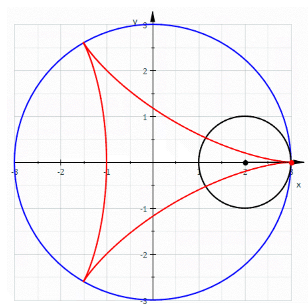
$$H(x, y, z) = (x, z, y) \qquad \text{ill.} \qquad G(x, y, z) = (y, z, x)$$

S6. Határozza meg az $F(x, y, z) = zy\underline{k}$ vektormező fluxusát a ∂M felületre nézve, ha ∂M az $x^2 + y^2 = 1$ henger egy darabjának a felszíne, melynek felső illetve alsó körlapja a $z = 1$ ill. $z = 0$ sík ban van.

Green tétel

G1. A Green tétel segítségével számolja ki egy deltoid területét:

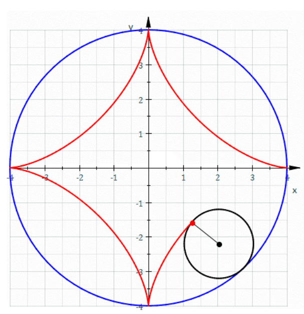
$$x(t) = 2a\cos(t) + a\cos(2t), \qquad y(t) = 2a\sin(t) - a\sin(2t), \qquad t\epsilon[0, 2\pi]$$



G2. A Green tétel segítségével határozza meg egy asztroid által közrezárt területet. Ennek egyenlete:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1,$$

lehetséges paraméterezése: $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t\epsilon[0, 2\pi]$. (Ism: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.)



G3. Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$ egy általános helyzetű négyzet, melynek határa $C = \partial R$. Igazolja, hogy az alábbi integrál értéke csak a négyzet nagyságától függ, és független annak elhelyezkedésétől:

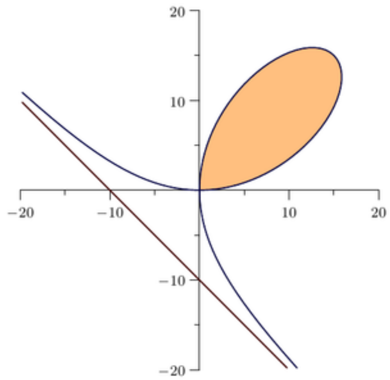
$$\oint_C xy^2\, dx + (x^2y + 2x)dy$$

G4. A Green tétel segítségével határozza meg egy Descartes levél területét. A levél körvonalának egyenlete:

$$x^3 + y^3 = 3xy, \qquad x, y \geq 0.$$

Paraméterezése:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \qquad t\epsilon[0,\infty].$$



(Javaslat: A számolás során használjuk ki, hogy $y = tx$.)

Differenciálgeometria

D1. Igazolja a Poincarré lemmát arra a speciális esetre, amikor

$$\omega = f(x,y,z)$$

D2. Az ω differenciál 1-forma *egzakt*, ha $\mathrm{d}\omega = 0$. Igazolja, hogy

$$\omega = z\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

egzakt. Milyen τ-ra teljesül, hogy $\omega = \mathrm{d}\tau$?

D3. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = y^2\mathrm{d}x + \cos(x+z)\mathrm{d}z. \qquad \tau = (x-z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Határozza meg:

$$\mathrm{d}\omega = ? \qquad \mathrm{d}\tau = ? \qquad \tau \wedge \omega = ?$$

D4. Tekintsük az alábbi formákat $\mathbb{R}^3$-ban:

$$\omega = x^2\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y + (x+z)\mathrm{d}z, \qquad \tau = (x+y+2z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Határozza meg:

$$\mathrm{d}\omega = ? \qquad \mathrm{d}\tau = ? \qquad \tau \wedge \omega = ?$$

D5. Legyenek adottak $\mathbb{R}^3$-ban az alábbi differenciálformák:

$$\alpha = yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z, \qquad \beta = z\sin(xy)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

. Számoljuk ki az $\alpha \wedge \beta$, $\mathrm{d}\alpha$, $\mathrm{d}\beta$ formákat!

D6. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^2$-ben. $\omega, \tau \epsilon \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y, \qquad \tau = w_1\,\mathrm{d}x + w_2\,\mathrm{d}y, \qquad v_1, v_2, w_1, w_2 \epsilon \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c\,\mathrm{d}x \wedge\, \mathrm{d}y$.

1. Mennyi c?
2. Mi köze van c-nek a $v = (v_1, v_2)$ és $w = (w_1, w_2)$ vektorokhoz?

D7. Adott két 1-forma $\mathbb{R}^3$-ban. $\omega, \tau \epsilon \bigwedge^1(\mathbb{R}^3)$, melyeket így jelölünk:

$$\omega = v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z, \qquad \tau = w_1\,\mathrm{d}x + w_2\,\mathrm{d}y + w_3\,\mathrm{d}z, \qquad v_i, w_j \epsilon \mathbb{R}.$$

Ezek külső szorzata egy 2-forma: $\omega \wedge \tau = c_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + c_2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + c_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

1. Mennyi c_1, c_2, c_3?
2. Mi köze van c-nek a $v = (v_1, v_2, v_3)$ és $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektorokhoz?