Matematikai Analízis III.

9. előadás.

Variációszámítás II.

2020. november 16.

Definíció. Adott két pont, (x_0, y_0) és (x_1, y_1), ahol $x_0 < x_1$.

A MEGENGEDHETŐ FÜGGVÉNYEK halmaza:

$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diff-ható, $\phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1\}$.

A VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ALAPFELADATA:

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) =? \qquad \text{ahol} \qquad I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\,\mathrm{d}x$$

Megjegyzés. $F = F(x, u, u')$.

Tétel. *(Szélsőérték szükséges feltétele)*

Tfh vmely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ fv minimalizálja az I funkcionált.

Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:

$$L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

Ez az EULER EGYENLET.

Példa. Keressük meg az alábbi funkcionál szélsőértékeit:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} \left[(u')^2 - u^2 \right] dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 1$$

$F(x, u, u') = (u')^2 - u^2$. (Az E-L egyenlet
$L[u] = F'_u - \dfrac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$)

Most

$$F'_u = -2u \quad F'{}_{u'} = 2u' \quad \text{és} \quad \frac{d}{dx}(2u'(x)) = 2u''(x).$$

Behelyettesítve:

$$L[u] = -2u(x) - 2u''(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'' + u = 0.$$

Tehát az $L[u] = 0$ feltételből: $u'' + u = 0.$

Ennek általános megoldása

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A peremfeltételek:

$$u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$

Egyetlen stacionárius megoldás van $u_0(x) = \sin(x).$

$$I(u_0) = \int_0^{\pi/2} \left[\cos^2(x) - \sin^2(x)\right] dx = \int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx = 0.$$

min. / max. / sem-sem?

Feladatok korlátozással

$$I(u) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x \qquad \longrightarrow \quad \text{min},$$

+ egyéb korlátozó feltétel:

$$J(u) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x = C.$$

Megoldás: A jól ismert Lagrange-féle multiplikátor módszer.

$$K(u) := \int_{x_0}^{x_1} (F - \lambda G)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} H(x, u(x), u'(x))\,\mathrm{d}x$$

funkcionálra vonatkozó Euler egyenletet kell megoldani.

Előző pl. folyt. Keressük meg az extremális értékeket:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} \left((u')^2 - u^2\right) dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 1$$

azzal az extra **korlátozással**, hogy

$$J(u) = \int_0^{\pi/2} 2u \; \mathrm{d}x = 6 - \pi.$$

A Lagrange multiplikátor szabályt alkalmazva:

$$K(u) := I(u) - \lambda J(u) = \int_0^{\pi/2} \left((u')^2 - u^2 - 2\lambda u\right) \; \mathrm{d}x.$$

Ekkor $H(x, u, u') = (u')^2 - u^2 - 2\lambda u$

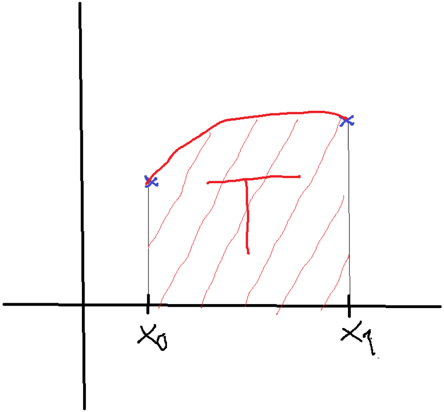
$$\Longrightarrow \quad H'_u = -2u - 2\lambda \qquad H'_{u'} = 2u'$$

Az Euler-egyenlet: $L[u] = H'_u - \dfrac{d}{dx} H'_{u'} = 0, \ \Rightarrow \ u'' + u = -\lambda.$

$$\Longrightarrow \quad u(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - \lambda \quad \Longrightarrow \quad u_0(x) = \cos(x) + 2\sin(x) -$$

További példák.

Feladat. $P_0(x_0, y_0)$ és $P_1(x_1, y_1)$ között a legrövidebb utat keressük, ha a két pontot összekötő görbe alatti terület adott T érték.



Feladat. (Az előző "megfordítása")

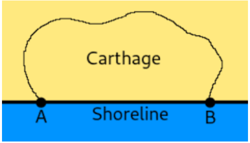
Tekintsük azon $u : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ fv-eket, melyre

$$u(0) = u(1) = 0, \qquad \text{és} \quad \int_0^1 \sqrt{1 + u'^2(x)}dx = L.$$

Keressük azt, amelyre:

$$T = \int_0^1 u(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \max?$$

Dido királynő feladványa



Több függvényt keresünk.

Példa. Adott $\mathbb{R}^3$-ban két pont $P_0(x_0, y_0, z_0)$ és $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

Ezeket összekötő görbe:

$$\{(x, y(x), z(x)), \quad x \in [x_0, x_1]\}$$

A görbe hossza:

$$I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}dx.$$

Ennek minimumát keressük.

Több függvényt keresünk.

Matematikai megfogalmazás:

$$\mathcal{C} = \left\{ \phi_1, \ldots, \phi_n : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ \phi_j(x_0) \text{ és } \phi_j(x_1) \text{ adottak },\ j = 1, \ldots n \right\},$$

ahol minden koordinátafüggvény kétszer folyt. diff-ható.

A funkcionál, aminek szélsőértékét keressük:

$$I(\phi_1, \ldots, \phi_n) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \phi_1'(x), \ldots, \phi_n'(x))\, \mathrm{d}x,$$

$$\min_{\mathcal{C}} I(\phi_1, \ldots, \phi_n) \quad \to \quad ?$$

Jelölés: F adott $(2n+1)$-változós fv, kétszer folyt. diff-ható fv

$$F = F(x, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n').$$

Optimalitás szükséges feltétele

Módszer mint korábban.

Tfh $u = (u_1, \dots u_n) \in \mathcal{C}$ minimalizál.

Perturbáljuk a j-dik fv-t, $\eta_j : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$, $\eta_j(x_0) = \eta_j(x_1) = 0$.

$$G_j(\varepsilon) := I(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + \varepsilon\eta_j, u_{j+1} \dots u_n).$$

$$\forall\varepsilon : \quad G_j(0) \leq G_(\varepsilon)$$

Definíció. $(u_1, \dots u_n)$ <u>stacionárius</u>, ha

$$G_j'(0) = 0 \qquad \forall j = 1, \dots n$$

minden lehetséges η_j perturbációra.

Szélsőérték szükséges feltétele

Az egyváltozós esethez hasonló számolással n db egyenletet kapunk.

Tétel.

Ha $(u_1, \dots u_n)$ stacionárius, akkor kielégíti az Euler egyenleteket :

$$L_j[u] = F'_{u_j} - \frac{d}{dx} F'_{u'_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots n.$$

Ez az n ismeretlen függvényre DER, amely másodrendű, nemlineáris. Megoldása tipikusan nem trivi.

Speciális eset.

Tfh F nem függ közvetlenül x-től.

$$F(\cancel{x}, u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n') = F(u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n')$$

Ekkor az alapesethez hasonlóan igazolható:

Állítás. A fenti esetben az Euler egyenlet $\forall$ megoldására $\exists c$:

$$E := F - \sum_{k=1}^{n} u_k' F'_{u_k'} = c$$

$$F(u_1(x), \ldots, u_1'(x), \ldots) - \sum_{k=1}^{n} u_k'(x) F'_{u_k'}(u_1(x), \ldots, u_1'(x), \ldots) = c.$$

Példa folyt. $L_j[u] = F'_{u_j} - \frac{d}{dx} F'_{u'_j} = 0$

A görbe hossza:

$$I(y, z) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx$$

Most $F(x, y, z, y', z') = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$

2 Euler egyenlet van, 2 ismeretlen függvényt keresünk.

$$F'_y = F'_z = 0, \quad F'_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} \quad F'_{z'} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$$

E-L egyenlet y-ra: $\frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$, innen $F'_{y'} = c_1$

E-L egyenlet z-re: $\frac{d}{dx} F'_{z'} = 0$, innen $F'_{z'} = c_2$

Példa folytatása.

$$\left.\begin{aligned} \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}} &= c_1 \\ \frac{z'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)+z'^2(x)}} &= c_2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad y'(x) = C_1, \quad z'(x) = C_2.$$

Tehát a legrövidebb út:

$$y(x) = C_1 x + D_1$$

$$z(x) = C_2 x + D_2,$$

ami egy térbeli egyenes paraméteres megadása. Szabad paraméterek illeszthetők. $\surd$

Folytatás?

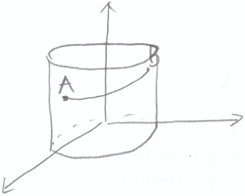
Tegyük fel, hogy a két pont közti legrövidebb utat egy

adott felületen keressük.

Pl. henger felületén.

—1—

Hengeren geodetikus



$A(x_0, y_0, z_0)$

$B(x_1, y_1, z_1)$

$x_0 = \cos\theta_0 \quad , \; y_0 \; \sin\theta_0$

$x_1 = \cos\theta_1 \quad y_1 = \sin\theta_1$

Henger pontjai

$x = \cos\theta$

$y = \sin\theta$

$z = z$

$\theta = \theta(t)$

$z = z(t) \quad , \quad t \in [0,1]$

$$\gamma(t) \quad \begin{cases} x(t) = \cos\theta(t) \\ y(t) = \sin\theta(t) \\ z(t) = z(t) \end{cases}$$

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) = \left(\sin^2\theta(t) + \cos^2\theta(t)\right)\theta'^2(t) + z'^2(t)$$

Ívhossz:

$$\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|\,dt = \int_0^1 \sqrt{\theta'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Variációszámítási feladat

$$I(\theta, z) = \int_0^1 \sqrt{\theta'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

$\theta, z \; [0,1] \to \mathbb{R}$ $\qquad \theta(0) = \theta_0 \qquad \theta(1) = \theta_1$

$\qquad z(0) = z_0 \qquad z(1) = z_1$

Trükk: két függvény helyett egyetlen:

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \theta = \theta(z) = ? \qquad \left(z'(t) = \frac{dz}{dt} \right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{\theta'^2(t) + z'^2(t)}\, dt = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\theta'^2(z) + 1}\, dz$$

$$\cdot \frac{dz}{z'(t)\,dt}$$

(Feltéve, hogy $z'(t) \neq 0$. Feltehető...)

Új feladat:

$$J(\theta) = \int_{z_0}^{z_1} \sqrt{\theta'^2(z) + 1}\, dz$$

$$\theta : [z_0, z_1] \to \mathbb{R} \qquad \theta(z_0) = \theta_0, \quad \theta(z_1) = \theta_1$$

Ma ismerős $\Rightarrow$ Lineáris

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{\theta_1 - \theta_0}{z_1 - z_0}(z - z_0) \quad \checkmark$$

Két alapelv

D'Alambert elv. Nyuagalomban levő rendszer:

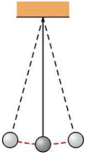
$\longrightarrow$ *minimális helyzeti energiára* törekszik.

Pl. Villanypóznák közti vezetékek.

Hamilton elv. (Legkisebb hatás elve) Időben változó rendszer:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,dt \quad \longrightarrow \quad \min \qquad \text{"helyzeti-mozgási"}$$

Pl. Inga mozgása (Gyak.)



Mechanikai rendszer.

n szabadsági fok. Leírás a q_j mennyiségekkel, $j = 1, \dots n$.

$\underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

$+$ időben változó: $\underline{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Sebessége a t idő pillanatban: $\underline{\dot{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$.

A helyzeti energia $U(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$, mozgási energia $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$.

Természetes feltételek: $U(\underline{q}, \cancel{\underline{\dot{q}}}) = U(\underline{q})$ és $T(\cancel{\underline{q}}, \underline{\dot{q}}) = T(\underline{\dot{q}})$.

A mozgási energia $\approx \frac{mv^2}{2}$, ilyen alakú:

$$T(\underline{\dot{q}}) = \underline{\dot{q}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\dot{q}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} \text{ egy szimmetrikus mátrix.}$$

$$T = \sum_{i,j} a_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t), \quad a_{ij}(\cancel{t}, \cancel{q_i})$$

Kiindulási állapot $\underline{q}(t_0)$, és a végállapot $\underline{q}(t_1)$. Merre megy?

A **Hamilton elv** szerint az optimális mozgás során

$$H(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\,\mathrm{d}t \qquad \longrightarrow \min.$$

Most $F(t, \underline{q}, \underline{\dot{q}}) = T(\underline{\dot{q}}) - U(\underline{q})$, ezért az optimalitás szükséges feltétele:

$$F'_{q_j} = \frac{d}{dt}(T - U)'_{\dot{q}_j} = \frac{d}{dt} T'_{\dot{q}_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots n.$$

$T - U$ nem függ közvetlenül t-től, ezért az energiafüggvényre:

$$E = F(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - \underline{\dot{q}} F'_{\underline{\dot{q}}}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \equiv c.$$

Lemma. Minden $T(\underline{\dot{q}})$ kvadratikus alakra $\underline{\dot{q}} T'(\underline{\dot{q}}) = 2T(\underline{\dot{q}})$.
$(x \cdot (x^2)' = 2x^2$ analógiájára). Emiatt

$$E = F - \underline{\dot{q}} F'_{\underline{\dot{q}}} = (T - U) - 2T = -U - T \equiv c.$$

Ezért optimális esetben $U + T$ konstans, tehát az össz-energia nem változik.

Ez a klasszikus *energia megmaradási törvény*.

Másodrendű funkcionál.

Egyetlen függvényt keresünk, és az optimalizálandó funkcionál:

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x))\, \mathrm{d}x,$$

ahol az F fv. 4-változós, $F(x, u, u', u'')$.

A megengedett függvények halmaza $\mathcal{C}$:

$\{\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ $\underline{\text{négyszer}}$ folyt diff. $\phi(x_0),\ \phi(x_1),\ \phi'(x_0),\ \phi'(x_1)\surd\}$.

$$\min_{\mathcal{C}} I(\phi) = ?$$

Másodrendű funkcionál.

Tegyük fel, hogy $u \in \mathcal{C}$ minimalizálja a költségfüggvényt.

Legyen η olyan *perturbáció*, melyre

$$0 = \eta(x_0) = \eta(x_1) = \eta'(x_0) = \eta'(x_1)$$

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta) \quad \Longrightarrow \quad G'(0) = 0.$$

Stb....

Tétel. Ha u optimalizál, akkor kielégíti az Euler egyenletet:

$$F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'} + \frac{d^2}{dx^2}F'_{u''} = 0.$$

Ez egy negyedrendű DE az u függvényre.

Minimális felszín probléma.

Példa. (*Plateau-feladat*) Keressük azt a kétváltozós függvényt, amelynek *felülete minimális* az adott peremfeltételek mellett.

$S \subset \mathbb{R}^2$, $u : S \to \mathbb{R}$. Kétváltozós függvény felszíne:

$$I(u) = \iint\limits_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\, \mathrm{d}(x, y), \tag{1}$$

és $u(x, y)$ előre rögzített minden $(x, y) \in \partial S$-re.

A feladat kb:

Meghajlított zárt keret szappanos vízből kivéve: milyen a szappanhártya alakja? $\longrightarrow$ Épp a minimális felszínű lesz.

$$I(u) = \iint_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\, \mathrm{d}(x, y) \longrightarrow \min?$$

A feladat *naiv* megoldása ez lenne:

$$u'_x = u'_y = 0,$$

tehát u konstans függvény.

Ekkor $I(u)$ értéke $A(S)$ konstans-szorosa lenne, ami valóban minimális.

Mi lehet gond?

Ez azonban csak akkor megoldás, ha a konstans függvény *megengedett*, vagyis ha u eleget tesz a peremfeltételeknek.

$$I(u) = \iint_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\,\mathrm{d}(x, y) \longrightarrow \min?$$

Speciális esetként legyen $S = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, az origo középpontú egységkör. Adott

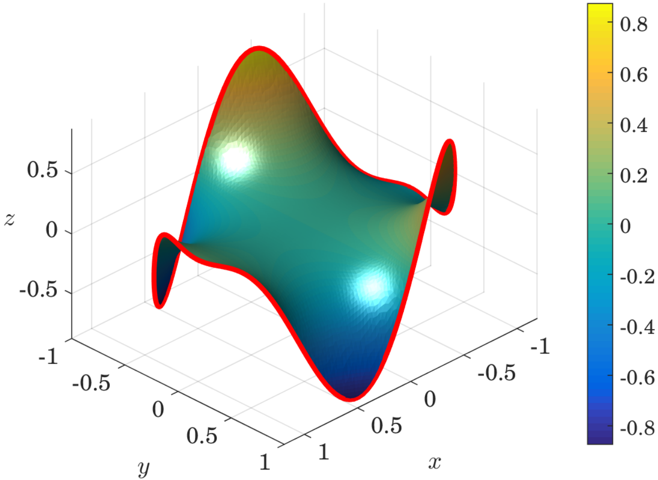
$$u(x, y) = \sin(3x)\cos(3y), \qquad \text{ha } x^2 + y^2 = 1$$

peremfeltétel mellett keressük a függvény felszínének minimumát.

Vajon mi lesz? Konstans fv nem megengedett!

A feladat megoldása az következő ábrán látható:

$u(x, y) = \sin(3x)\cos(3y), \qquad \text{ha } x^2 + y^2 = 1$



Hogy találhatjuk meg ezt a megoldást?