Matematikai Analízis III.

8. előadás.

Variációszámítás.

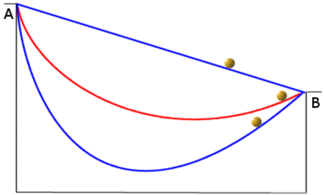
2020. november 9.

Bernoulli feladata 1696-ból

A *Bernoulli-feladat* avagy BRACHISZTOCHRON PROBLÉMA:

A és *B* két pont a síkon, melyeket vékony drót köt össze.

A magasabban van, mint *B*, onnan elengedünk egy pontszerű testet egy görbe alakú drótpálya mentén.

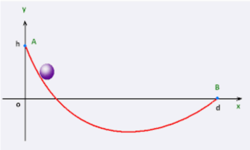


Csak a gravitáció mozgat lefelé, nincs súrlódás.

Melyik az a görbe, amelyen a test a *legrövidebb idő* alatt ér le *A*-ból *B*-be?

Brachistochrone. Matematikai feladat

$A = (x_0, y_0)$ és $B = (x_1, y_1)$, melyre $x_0 < x_1$ és $y_0 > y_1$.



A görbét egy $y = \phi(x)$ függvény írja le, melyre: $\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$,

$\phi(x_0) = y_0, \; \phi(x_1) = y_1$.

Tfh ϕ differenciálható. Ekkor a megérkezéshez szükséges idő:

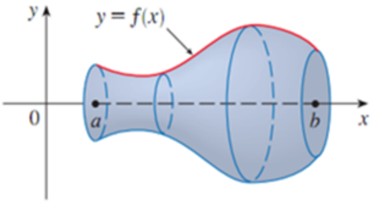
$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + \phi'^2(x)}}{\sqrt{\phi(x) - y_0}} \, \mathrm{d}x, \quad g \text{ a gravitációs konstans}$$

Ennek az *integrálnak a minimumát* keressük a lehetséges $\phi(x)$ függvények halmazán.

Forgástest felszín minimalizálás

Adottak $A(a, y_0)$ és $B(b, y_1)$, $a \neq b$, ahol $y_0 > 0$ és $y_1 > 0$.

A pontokat összekötjük egy sima görbével, amely egy $y = f(x)$ függvény gráfja.



A görbét forgassuk meg az x tengely körül.

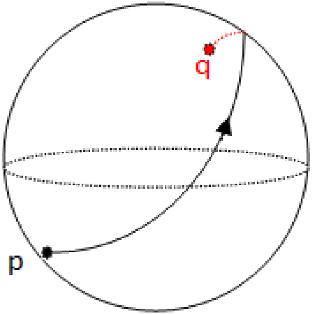
Az így keletkezett forgástest felszíne:

$$T = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \quad (\textit{Gyak-on} \surd)$$

Milyen f esetén lesz T a legkisebb, ha $f(a) = y_0$ és $f(b) = y_1$?

Geodetikus görbék.

Adott egy $S \subset \mathbb{R}^3$ felület, és rajta két pont $\mathbf{p}$ és q.



A két pontot összekötő,

a felületen haladó $C \subset S$

görbék közül melyik a

legrövidebb?

Geodetikus görbék, matematikai keretben.

Legyen a C görbe paraméterezése:

$$C = \{(x(t), y(t), z(t)) \ : \ t \in [a, b]\}.$$

Akkor a feladat így formalizálható meg:

$$s(C) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, \mathrm{d}t \longrightarrow \min_{C \subset S}?$$

az $(x(a), y(a), z(a)) = \mathbf{p}$ és $(x(b), y(b), z(b)) = q$ feltételek mellett.

Matematikai keret.

Definíció. Adott két pont, (x_0, y_0) és (x_1, y_1), ahol $x_0 < x_1$.

A MEGENGEDHETŐ FÜGGVÉNYEK halmazát $\mathcal{C}$ jelöli:

$\mathcal{C} = \{\phi : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ kétszer folyt. diff-ható, $\phi(x_0) = y_0, \phi(x_1) = y_1\}$.

(elnevezés háttere?)

Adott ezen kívül egy $I : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ funkcionál, mely speciális alakú.

Nevezetesen, ez egy *integrál-operátor*:

$$I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, \mathrm{d}x,$$

ahol $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy adott, kétszer folytonosan diff-ható fv.

Keressük azon $u \in \mathcal{C}$ függvényeket, amelyekre $I(u)$ minimális.

Fontos kitérő. $I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\,\mathrm{d}x$

Itt egy szokatlan jelölést fogunk használni.

Az $I(u)$ funkcionál értékének kiszámításakor:

- $F(\cdot,\cdot,\cdot)$ *első argumentuma* (a megszokott) x,
- a *második argumentumba* egy $u(x)$ függvényt,
- a *harmadik argumentumba* ennek $u'(x)$ deriváltját írjuk.

Emiatt F argumentumait (x, y, z) helyett (x, u, u')-vel jelöljük:

$$F = F(x, u, u').$$

Erre akkor kell nagyon figyelni, amikor u vagy u', mint *változó* szerint deriválunk.

Alapfeladat.

Ezek után VARIÁCIÓSZÁMÍTÁS ALAPFELADATA:

$$\min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) = ? \qquad \text{ahol } I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, \mathrm{d}x,$$

és $\mathcal{C}$ a megengedhető függvények halmaza.

1. *Megjegyzés.* Általában a fenti funkcionál *extremális* értékét keressük, ami lehet *minimum* helyett *maximum* is.

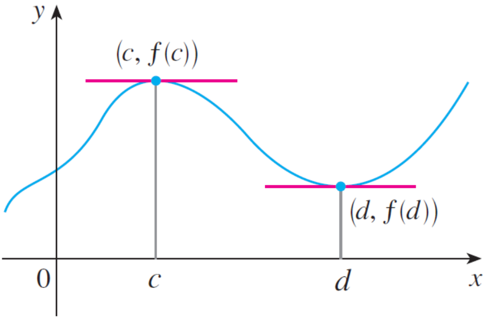
2. *Megjegyzés.* Nincs garancia arra, hogy *van* optimális megoldás.

Ismétlés: Valós függvény esetére

Tétel. (Szükséges feltétel lokális szélsőértékre)

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható, $x_0 \in \operatorname{int}(D_f)$.

Ha f-nek x_0-ban *lokális szélsőértéke* van, akkor $f'(x_0) = 0$.



Ismétlés: Többváltozós függvény esetére

Tétel. (Szükséges feltétel lokális szélsőértékre)

Tfh $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható, $a = (a_1, \ldots a_n) \in \operatorname{int}(D_f)$.

Ha f-nek a-ban *lokális szélsőértéke* van, akkor

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a) = 0 \quad \forall i = 1, \ldots n.$$

Más szóval:

"a derivált $\underline{\text{minden irányban 0}}$ az adott pontban."

Bizonyítás. Visszavezettük egyváltozós függvényre.

Az alapfeladat megoldása.

$$\text{Ism:} \quad \min_{\phi \in \mathcal{C}} I(\phi) = ? \quad \text{ahol } I(\phi) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, \phi(x), \phi'(x))\, \mathrm{d}x$$

Az optimalizálási feladat megoldását visszavezetjük *egyváltozós függvény* szélsőérték meghatározására.

Szükséges feltételt fogunk adni az optimumra.

Tfh. valamely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ függvény minimalizálja I-t:

$$I(u) \leq I(y), \qquad \forall y \in \mathcal{C}.$$

Perturbáció.

Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{C}_0 = \{\eta : [x_0, x_1] \to \mathbb{R} \text{ kétszer diff-ható}, \eta(x_0) = \eta(x_1) = 0\},$$

ez a *lehetséges irányok halmaza.*

Ha u-hoz egy $\eta \in \mathcal{C}_0$ függvényt hozzáadunk (*perturbáljuk*), akkor $u + \eta$ is a megengedhető halmazban lesz. Miért?

Tehát $(u + \eta) \in \mathcal{C}$. $\implies$ $I(u) \le I(u + \eta)$ $\surd$

Rögzített $\eta \in \mathcal{C}_0$-ra definiáljuk a következő függvényt:

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta), \quad G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Eddig: $G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta)$, és $I(u) \leq I(u + \varepsilon\eta), \quad \forall\varepsilon \in \mathbb{R}$

Tehát $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff-ható valós függvény, melyre

$$\forall\varepsilon : \quad G(0) \leq G(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad G'(0) = 0,$$

$G(\varepsilon)$ így írható:

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Határozzuk meg $G'(\varepsilon)$-t.

$$G(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))\,\mathrm{d}x.$$

Deriváljuk G-t a láncszabály alapján.

(F'_u és $F'_{u'}$ argumentumaiban $(x, u(x) + \varepsilon\eta(x), u'(x) + \varepsilon\eta'(x))$)

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u(\,.\,)\eta(x) + F'_{u'}(\,.\,)\cdot\eta'(x)\right)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F'_u(\,.\,)\cdot\eta(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}(\,.\,)\eta'(x)\,\mathrm{d}x.$$

A második tagot parciálisan integráljuk:

$$\int_{x_0}^{x_1} F'_{u'}(\,.\,)\eta'(x)\,\mathrm{d}x = F'_{u'}(\,.\,)\cdot\eta(x)\Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\frac{d}{dx}F'_{u'}(\,.\,)\,\mathrm{d}x.$$

A jobboldal első tagja 0 lesz, miért?? $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$ miatt.

Az egész integrál tehát:

$$G'(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} \left(F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} \right) \cdot \eta(x) \, \mathrm{d}x.$$

Ezért $\forall \eta \in \mathcal{C}_0$-ra teljesülnie kell, hogy

$$G'(0) = \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \left(F'_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x, u, u') \right) \, \mathrm{d}x = 0.$$

(A jobboldalon az argumentumok $(x, u(x), u'(x))$.)

Cél: η-mentes feltétel.

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \left(F'_u(x,u,u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x,u,u') \right) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Egy klasszikus lemma:

Lemma. Ha valamely $C : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ folyonos függvényre

$$\int_{x_0}^{x_1} C(x)\eta(x) \, \mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \eta \in \mathcal{C}_0,$$

akkor $C(x) = 0$ $\forall x \in [x_0, x_1]$ esetén. (Biz??? **HF**)

A lemma miatt a fenti egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha

$$F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

Így beláttuk a következő *szükséges feltételt*:

$$\int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \cdot \left(F'_u(x,u,u') - \frac{d}{dx} F'_{u'}(x,u,u') \right) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Tétel. *[Szélsőérték szükséges feltétele]*

Tfh vmely $u = u(x) \in \mathcal{C}$ fv minimalizálja az I funkcionált.

Ekkor az u függvény kielégíti az alábbi összefüggést:

$$L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$$

Ez az EULER EGYENLET.

Az $L[u] = 0$ egyenlet megoldásai **stacionárius megoldások**.

Euler egyenlet. $L[u] := \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u'} = F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'} = 0.$

$\frac{d}{dx}F'_{u'}$ kifejtése a láncszabály alapján:

$$\frac{d}{dx}F'_{u'}(x, u(x), u'(x)) = \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u}u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u' \partial u'}u''$$

Ezt visszahelyettesítve az Euler egyenletbe azt kapjuk, hogy:

$$F'_u - F''_{u'x} - u'F''_{u'u} - u''F''_{u'u'} = 0.$$

A kapott másodrendű DE-ben az u függvényt keressük.

Ez tipikusan nemlineáris DE, **nincs** általános megoldása.

Euler egyenlet. $L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$

Példa. *Két pont között a legrövidebb út az egyenes.*

A két pont $P_0(x_0, y_0)$ és $P_1(x_1, y_1)$. Az őket összekötő görbe egy $y = y(x)$ függvény, melyre $y(x_0) = y_0$ és $y(x_1) = y_1$.

RAJZ! A görbe hossza:

$$I[y] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad F(x, u, u') = \sqrt{1 + u'^2}$$

$F'_u = 0\surd$ Így az Euler-egyenlet:

$$\frac{d}{dx} F'_{u'} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F'_{u'} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + u'^2}} 2u' = c \text{ konstans.}$$

$\Longrightarrow$ $u'(x)$ szintén konstans. $\Longrightarrow$ az optimális $u(x)$ egy egyenes.

Euler egyenlet. $L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0.$

1. eset. F nem függ expliciten u'-től, azaz

$$F(x, u, \cancel{u'}) = F(x, u)$$

Akkor $F'_{u'} = 0$.

Az Euler-egyenlet egy *implicit függvény* feladat:

$$F'_u(x, u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = u(x)\surd$$

Euler egyenlet. $L[u] := F'_u - \frac{d}{dx}F'_{u'} = 0.$

2. eset. F nem függ közvetlenül u-tól, $F(x, \cancel{u}, u')$

Akkor $F = F(x, u')$ alakú. Az Euler-egyenlet:

$$-\frac{d}{dx}F'_{u'} = 0,$$

amiből $F'_{u'} = c$ konstans.Ez azt jelenti, hogy

$$F(x, u') = cu'.$$

Ebből az implicit alakból u'-t kifejezhetjük, majd integrálunk:

$$u'(x) = f(x, c), \qquad \Longrightarrow \qquad u = \int f(x, c)\,\mathrm{d}x + d, \qquad d \text{ konstans.}$$

A c és d konstansok megválasztásával kielégíthetők a peremfeltételek.

Euler egyenlet. $F'_u - F''_{u'x} - u'F''_{u'u} - u''F''_{u'u'} = 0.$

3. speciális eset. Az alkalmazásokban leggyakoribb:

$$F(\cancel{x}, u, u') = F(u, u')$$

Ekkor definiáljunk egy következő függvényt:

$$E := F - u'F'_{u'}, \qquad E(x) := F(u(x), u'(x)) - u'(x)F'_{u'}(u(x), u'(x)).$$

Ennek deriváltja (az argumentumok nélkül):

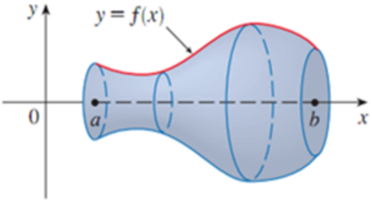
$$E' = u'F'_u + u''F'_{u'} - u''F'_{u'} - u'(u'F''_{u'u} + u''F'_{u'u'}) =$$

$$= u'(F'_u - u'F''_{u'u} - u''F'_{u'u'}) = u'L[u]. \;\; \textit{Check!}$$

Ha u stacionárius mo, akkor $E' = u'L[u] = 0$, tehát $E(x) \equiv c$.

Egy *energia-jellegű mennyiség*, ami optimális esetben állandó.

Forgástest felszín minimalizálás



Az $(x, y(x))$ görbe egy darabját megforgatjuk az x tengely körül. A kapott forgástest felszíne:

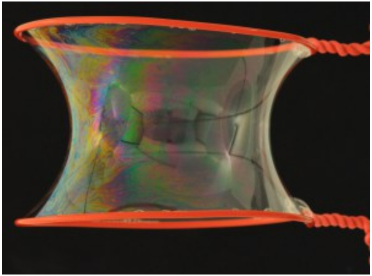
$$T[y] = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

A variációszámítási feladatban most (2π-től eltekintünk) :

$$F(u, u') = u\sqrt{1 + u'^2}.$$

Ez a *3. speciális eset.* A megoldás $\mathrm{ch}\,(x)$ fv lin. transzformáltja:

$$u(x) = c \cdot \mathrm{ch}\left(\frac{x + d}{c}\right), \qquad c, d \text{ két szabad paraméter.}$$



D'Alambert elv:

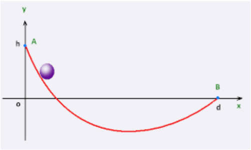
"Statikus egyensúlyi állapotban minimális a helyzeti energia."

$\Longrightarrow$ Szappanhártya esetén minimális a felszín.

Ez egy ch függvény megforgatásával áll elő.

Megjegyzés. A *ch* függvény másik neve a *láncgörbe*.

Brachisztochron probléma, újra



$A = (x_0, y_0)$ és $B = (x_1, y_1)$.

A görbét egy $y = y(x)$ függvény írja le, melyre $y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1$.

$$T(u) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'^2(x)}}{\sqrt{u(x)}}\,\mathrm{d}x, \quad \Longrightarrow \quad F(u, u') = \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\sqrt{u}},$$

ahol $u = y - y_0$. A megoldásra kapott összefüggések:

$$x - b = \frac{1}{2c^2}\left(t - \sin(t)\right), \qquad y - y_0 = \frac{1}{2c^2}\left(1 - \cos(t)\right)$$

melyek épp egy ciklois-darab paraméteres leírását adják.

Példa

Keressük meg az alábbi funkcionál extremális értékeit:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} \left[(u')^2 - u^2\right] dx,$$

az $u(0) = 0$ és $u(\pi/2) = 1$ peremfeltételekkel.

Itt $F(x, u, u') = \left[(u')^2 - u^2\right]$, ezért

$$F'_u = -2u \quad \text{és} \quad F'_{u'} = 2u'.$$

Az Euler egyenlet $L[u] := F'_u - \frac{d}{dx} F'_{u'} = 0$. Behelyettesítve:

$$(-2u) - \frac{d}{dx}(2u') = 0 \quad \Longrightarrow \quad u'' + u = 0.$$

Ennek általános megoldása

$$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A peremfeltételek mellett: $u_0(x) = \sin(x)$. min. vagy max. vagy

Előző példa folytatása.

Keressük meg az alábbi funkcionál extremális értékeit:

$$I(u) = \int_0^{\pi/2} \left[(u')^2 - u^2 \right] dx, \qquad u(0) = 0, \quad u(\pi/2) = 1$$

azzal az extra **korlátozással**, hogy

$$L(u) = \int_0^{\pi/2} 2u \, dx = 6 - \pi.$$

A Lagrange multiplikátor szabályt alkalmazva definiáljuk:

$$H(u) := I(u) - \lambda L(u) = \int_0^{\pi/2} \left[(u')^2 - u^2 - 2\lambda u \right] dx.$$

Ekkor $H'_u = -2u - 2\lambda$ és $H'_{u'} = 2u'$

Az Euler-egyenletből ezt kapjuk: $u'' + u = -\lambda.$ Befejezés?