Matematikai Analízis III.

7. előadás

2020. október 19.

Ismétlés. Sokaság implicit megadása.

$M \in \mathbb{R}^n$ k DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁG,

ha $\exists \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff-ható függvények:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{\varrho_i = 0\}.$$

Feltesszük, hogy a ϱ_i gradiensei lineárisan függetlenek:

$$\begin{pmatrix} \nabla \varrho_1 \\ \nabla \varrho_2 \\ \vdots \\ \nabla \varrho_{n-k} \end{pmatrix}$$

teljes rangú M pontjaiban.

Implicit sokaságok.

1. Példa. Az egységkörvonal $\mathbb{R}^2$-ben 1-dimenziós sokaság.

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

Itt $n = 2$ és $k = 1$.

2. Példa. M az az $\mathbb{R}^3$-beli egységkör, mely az (x, y) *síkba* esik.

$$\varrho_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad \varrho_2(x, y, z) = z = 0$$

Itt $n = 3$ és $k = 1$.

Normál tér.

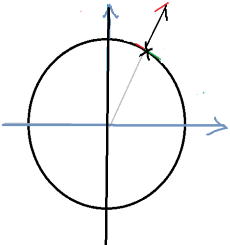
Definíció. $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós sokaság, *impliciten megadva*.

Ekkor a $p \in M$ ponthoz tartozó N_p NORMÁL TÉR:

$$N_p(M) = \text{span}\{\nabla\varrho_1, \nabla\varrho_2 \ldots \nabla\varrho_{n-k}\} \quad (\text{"normálvektorok tere"})$$

Példa. $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Itt $\varrho(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ és $\nabla\varrho = (2x, 2y)$.



Normál tér: ez a vektor által kifeszített altér.

Tangenstér (érintőtér).

Definíció. A p-hez tartozó T_p TANGENSTÉR vagy ÉRINTŐTÉR

$$T_p = \{\underline{v} : \underline{v} \perp N_p\},$$

a normál tér ortogonális kiegészítője. ("érintővektorok tere")

Állítás. $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós sokaság, és $p \in M$ pont

körül a paraméterezés $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. ϕ Jacobi mátrixa:

$$D\phi = \begin{pmatrix} \nabla\phi_1 \\ \vdots \\ \nabla\phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1, \dots v_k \end{pmatrix}, \qquad v_j \in \mathbb{R}^n$$

Ekkor a $p \in M$ ponthoz tartozó T_p érintőtér bázisa: $\{v_1, \dots v_k\}$.

Nyilván $\dim N_p = n - k$ és $\dim T_p = k$.

Normál tér és érintőtér *2. Példa*.

M az az $\mathbb{R}^3$-beli egységkör, mely az (x, y) *síkba* esik.

Ennek paraméteres megadása:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^2 + v^2 < 1.$$

a paraméterező vektormező Jacobi mátrixa

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies T_p \text{ bázisa:} \ldots ??$$

Magyarázat?

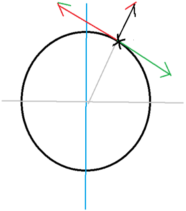
Normál tér és érintőtér. 1. Példa, újra.

Példa. $S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$.

Itt $\varrho(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ és $\nabla\varrho = (2x, 2y)$.

Tekintsünk a $p = (x_0, y_0) \in S^1$ pontot. N_p bázisvektora (x_0, y_0).

T_p bázisának vehetjük a $(-y_0, x_0)$ vektort.



Megjegyzés. T_p bázisának a $(y_0, -x_0)$ vektort is választhattuk volna.

Így T_p kétféle irányítása lehetséges. Ezért beszélnünk kell az irányításokról.

Vektortér irányítása.

Legyen V k-dimenziós vektortér. Ebben egy bázis:

$$[v] = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}.$$

Egy $[w] = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_k\}$ bázis segítségével $\underline{v}_i$ felírható:

$$\underline{v}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\underline{w}_j, \qquad i = 1, 2, \dots k.$$

$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (a_{ij})$ nem szinguláris, azaz $\det \underline{\underline{\mathbf{A}}} \neq 0$.

V-ben egy bázist rögzítve: minden bázis *két osztályra osztható*

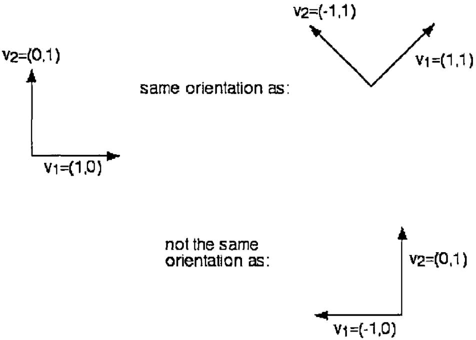
$\Longrightarrow$ az áttérési mátrix determinánsa pozitív vagy negatív.

Ekvivalencia reláció. (**HF**)

Definíció. A V VT-ben $[v]$ és $[w]$ bázis közti áttérési mátrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$:

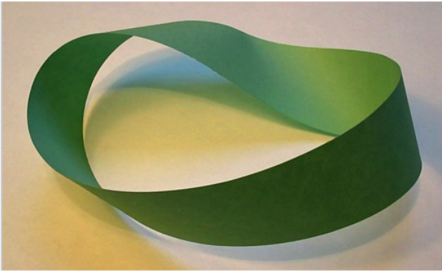
$$\forall \underline{x} \in V: \qquad \underline{x}_{[w]} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{x}_{[v]}.$$

Ekkor $[v]$ és $[w]$ AZONOS IRÁNYÍTÁSÚ, ha $\det\{\underline{\underline{\mathbf{A}}}\} > 0$.



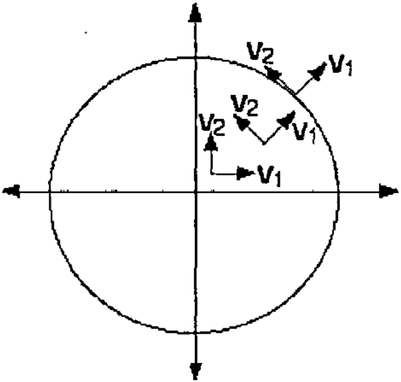
Sokaság irányítása.

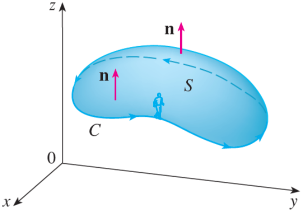
Definíció. Egy sokaság IRÁNYÍTHATÓ, ha minden pontban megválasztható a *normál tér irányítása* úgy, hogy az folytonosan változzon a sokaság mentén.



A Moebius-szalag kétdimenziós sokaság, amely például nem irányítható.

Sokaság és határának irányítása.





Motiváció 1. rész

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós sokaság, $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k-forma.

Szeretnénk értelmezni az $\int_M \omega$ mennyiséget.

Ehhez először két speciális esetet nézünk meg.

1. speciális eset. Legyen $n = k = 3$.

Akkor M egy nyílt térrész, és $\omega = f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$.

Ebből egy közönséges hármas integrált kapunk:

$$\int_M \omega = \iiint\limits_M f(x, y, z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$

Motiváció 2. rész

2. speciális eset. Legyen $n = 2$ és $k = 1$. Akkor M egy görbe:

$$M = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) \;:\; t \in (a, b)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Az $\mathbb{R}^2$-beli 1-formák terének dimenziója $\binom{2}{1} = 2$, ezért *két lineárisan független* differenciálformánk van:

$$\omega_1 = f(x, y)\,\mathrm{d}x, \qquad \omega_2 = g(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

A megfelelő absztrakt integrálok ismerősek már:

$$\int_M \omega_1 = \int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(t))x'(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_M \omega_2 = \int_M g(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(\gamma(t))y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Motiváció 2. (folyt.)

Emlékeztető: integrálás helyettesítéssel:

$„\,\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t"$

Használjuk az 1-dimenziós sokaság absztrakt definícióját, és itt

- a V nyílt gömb az $V = (a, b)$ intervallum,
- a $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ leképezésnek $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ felel meg.

$\phi(= \gamma)$ Jacobi-mátrixa:

$$\mathrm{D}\,\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

ϕ Jacobi mátrixa: $\mathrm{D}\,\gamma = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$

Elsőként $\omega_1 = f(x, y)\,\mathrm{d}x$ integrását nézzük.

Az első sort vesszük ki úgy, hogy behelyettesítünk egy elemi

formába: $\mathrm{d}x(\mathrm{D}\,\gamma) = x'(t)$.

$$\Longrightarrow \quad \int_M \omega_1 = \int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\gamma(t))\,\underbrace{\mathrm{d}x(\mathrm{D}\,\gamma)}_{x'(t)}\,\mathrm{d}t.$$

$\omega_2 = g(x, y)\,\mathrm{d}y$ integrásakor a második sor: $\mathrm{d}y(\mathrm{D}\,\gamma) = y'(t)$.

Ennek megfelelően

$$\int_M \omega_2 = \int_M g(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(\gamma(t))\,\underbrace{\mathrm{d}y(\mathrm{D}\,\gamma)}_{y'(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ismétlés: Sokaság paraméteres megadása

Definíció. $M \subset \mathbb{R}^n$ egy **k**-DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁG ha $\forall p \in M$-nek $\exists U$ környezete, melyhez

- $\exists \phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény,
- és $\exists V \subset \mathbb{R}^k$ **nyílt** halmaz, melyre $\phi(V) = U \cap M$ 1-1-értelmű, és $D\phi$ teljes rangú.

A sokaság p pont körüli LOKÁLIS PARAMÉTEREZÉSE a fenti ϕ .

$$P \in M \subset \mathbb{R}^n, \quad P = \phi^{-1}(u) \iff (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k$$

Formák integrálása sokaságokon

Definíció. Legyen $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimenziós diff-ható sokaság, paraméteresen megadva. Tfh egyetlen (ϕ, V) térkép megadja.

A sokaság paraméteres megadásában:

- $\phi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^k$ olyan nyílt gömb, hogy $\phi(V) = M$,
- valamint $\mathrm{D}\,\phi \in \mathbb{R}^{n \times k}$ teljes rangú mátrix.

Adott $\omega \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$ differenciál k-forma.

Ekkor ω **M**-EN VETT INTEGRÁLJÁT a így definiáljuk:

$$\int_M \omega = \int_V \omega(\mathrm{D}\,\phi)\,\mathrm{d}u_1 \dots \,\mathrm{d}u_k.$$

A fenti definícióban az absztrakt integrált *közönséges* k-szoros integrálra vezettük vissza.

Általános Stokes-tétel

Tétel. Legyen M k-dimenziós irányítható sokaság,

melynek határa ∂M $(k-1)$-dimenziós irányítható sokaság.

Tfh M és ∂M irányítása megfelelnek egymásnak.

Legyen ω differenciál $(k-1)$-forma, akkor $\mathrm{d}\omega$ diff. k-forma.

Ekkor

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

1. Példa.

Legyen $n = k = 1$. Ekkor $M = (a, b)$, határa $\partial M = \{b, a\}$.

Legyen ω diff 0-forma: $\omega = f(x)$, így $\mathrm{d}\omega = f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ekkor

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\{b,a\}} f = f(b) - f(a).$$

Miért negatív $f(a)$ előjele?

$\Longrightarrow$ *N-L formula* az általános Stokes tétel speciális esete.

2. Példa.

Legyen $n = k = 2$. Ekkor M egy tartomány a síkon,

∂M pedig az azt határoló zárt görbe.

A differenciál 1-forma általános alakja $\mathbb{R}^2$-ben

$$\omega = f(x, y)\,\mathrm{d}x + g(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

ezért ennek külső deriváltja: $\mathrm{d}\omega = (g'_x - f'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Ekkor az általános Stokes tétel két oldala:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \iint_M (g'_x - f'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad \int_{\partial M} \omega = \oint_{\partial M} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y)\,.$$

$\Longrightarrow \oint_{\partial M} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \iint_M (g'_x - f'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$ Ez a *Green tétel*.