Differenciálformák 2. rész
Sokaságok 2. rész

2020. október 12.

Motiváció

Stokes tétel: $\text{"}\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\partial M} \omega\text{"}$

$\mathrm{d}\omega$: differenciálforma, ami k-dimenziós mérték a $\mathbb{R}^n$-ben.

$M \subset \mathbb{R}^n$, ami k-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^n$-ben.

Differenciálformák Ismétlés.

- DIFFERENCIÁL 0-FORMA: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diff-ható skalármező
- DIFFERENCIÁL 1-FORMA:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}x_j,$$

  ahol $\mathrm{d}x_j$ elemi 1-forma, és $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff-ható függvény.

- DIFFERENCIÁL k-FORMA:

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I \, \mathrm{d}x_I,$$

  ahol $\mathcal{I}$ a k *elemű indexhalmazok* részhalmaza, $\mathrm{d}x_I$ egy elemi k-forma, és $f_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

Külső deriválás. Háttér.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($\equiv$ *diff. 0-forma*). $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ vonal ($\equiv$ *1-dim. sokaság*.)

f "differenciálja" Γ mentén?

$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t \in [a, b]\}$, $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

$\Longrightarrow$ f értéke Γ mentén: $f(\gamma(t))$, $t \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(\gamma(t + \Delta t)) - f(\gamma(t)) =? \\ &\approx \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(x_1(t), \ldots x_n(t)) \cdot \underbrace{(x_i(t + \Delta t) - x_i(t))}_{\Delta x_i} + o(\|\Delta x\|). \end{aligned}$$

Ha $\Delta t \to 0$ $\Longrightarrow$ $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \, \mathrm{d}x_i$. *Külső derivált.*

Definíció. (ism.) Differenciálformák külső deriváltja.

- Ha $\omega = f \ \mathrm{d}x_I$ differenciál k-forma, ($I = \{i_1, \dots i_k\}$)

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i} \ \mathrm{d}x_i \wedge \ \mathrm{d}x_I$$

- Általános esetben, ha $\omega = \sum_j \omega_j$, akkor $\mathrm{d}\omega = \sum_j \ \mathrm{d}\omega_j$.

Megjegyzés. Ha ω differenciál n-forma $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $d\omega = 0$.

LEMMA (POINCARRÉ LEMMA) $\forall\omega$ differenciál k-formára:

$$\mathrm{d}(\ \mathrm{d}\omega) = 0.$$

$\mathbb{R}^3$-ban: Formák ill. skalár- és vektormezők

Az elemi 1-formák jelölése: $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$.

Definiáljuk a következő hozzárendeléseket:

0. $\omega_0 = f(x, y, z)$: egy 0-forma $\iff$ $T_0(\omega) = f(x, y, z)$.

$$T_0 : \bigwedge^0(\mathbb{R}^3) \to \{\text{skalármezők}\}$$

1. $\omega_1 = f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y + h\ \mathrm{d}z$ egy 1-forma $\iff$ $F = (f, g, h)$.

$$T_1 : \bigwedge^1(\mathbb{R}^3) \to \{\text{vektormezők }\}$$

Kitérő. Ha $\omega_0 \in \bigwedge^0(\mathbb{R}^3)$, $\omega_0 = f$, akkor

$$\mathrm{d}\omega_0 = f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y + f'_z\,\mathrm{d}z \quad \Longrightarrow \quad T_1(d\omega_0) = \mathrm{grad}\ T_0(\omega_0).$$

Kiszámolva:

$$\mathrm{grad} \equiv \text{külső derivált.}$$

Gondolkodjunk tovább. $\omega_1 = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$.

Külső deriváltja differenciál 2-forma:

$$\mathrm{d}\omega_1 = (\quad)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (\quad)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + (\quad)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

$$= (-f'_y + g'_x)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + (-f'_z + h'_x)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + (-g'_z + h'_y)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

Ismerős-e? összekeverve vmi...

2. $\omega_2 = F \, \mathrm{d}x \wedge \, \mathrm{d}y + G \, \mathrm{d}x \wedge \, \mathrm{d}z + H \, \mathrm{d}y \wedge \, \mathrm{d}z$ egy 2-forma

$$\iff \quad T_2(\omega) = (H, -G, F).$$

$$T_2 : \bigwedge^2(\mathbb{R}^3) \to \{\text{vektormezők }\}$$

3. T_3 egy 3-formához skalármezőt rendel:

$$\omega = f(x,y,z) \, \mathrm{d}x \wedge \, \mathrm{d}y \wedge \, \mathrm{d}z \quad \iff \quad T_3(\omega) = f$$

$$T_3 : \bigwedge^3(\mathbb{R}^3) \to \{\text{skalármezők}\}$$

A *vektor-operátorokat* visszavezetjük a *formák deriválására.*

(Az ékszorzat jelét nem írjuk ki)

Állítás.

1. Ha $\omega_0 \in \bigwedge^0$, $\omega_o = f$, akkor

$$T_1(\,\mathrm{d}\omega_0) = \mathrm{grad}\ T_0(\omega) = \mathrm{grad}\ f.$$

2. Ha $\omega_1 \in \bigwedge^1$, $\omega_1 = f\ \mathrm{d}x + g\ \mathrm{d}y + h\ \mathrm{d}z$, akkor

$$\mathrm{d}\omega_1 = (-f'_y + g'_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + (-f'_z + h'_x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + (-g'_z + h'_y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$T_2(\,\mathrm{d}\omega_1) = (h'_y - g'_z,\ f'_z - h'_x,\ g'_x - f'_y) = \mathrm{rot}\,(T_1)(\omega).$$

3. Ha $\omega_2 \in \bigwedge^2$,

$$\omega_2 = h \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y - g \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z + f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z, \quad (T_2(\omega_2) = (f, g, h)).$$

Akkor $\mathrm{d}\omega_2 = (h'_z + g'_y + f'_x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$.

$$T_3(\,\mathrm{d}\omega_2) = T_3\left((h'_z + g'_y + f'_x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z\right) = \mathrm{div}\,(T_2(\omega))$$

Következmény.

Abból, hogy $\mathrm{d}^2\omega = \mathrm{d}(\,\mathrm{d}\omega) = 0$ következik, hogy

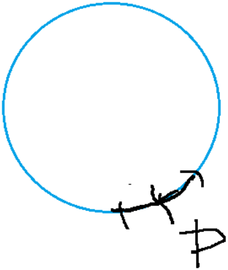
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\; f = 0 \qquad \text{ill.} \qquad \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,(F) = 0.$$

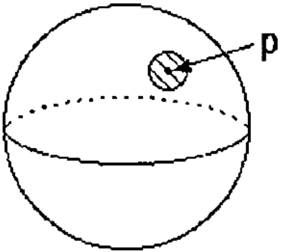
Sokaságok 2. rész.

Heurisztika

Sokaság

$\forall p$ pont környezete $\approx$ k-dim "gömb".



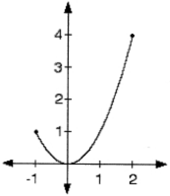


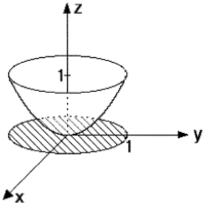
$M \subset \mathbb{R}^n$ **k**-DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁG, ha

$\forall p \in M$-nek $\exists U$ környezete, mely "azonosítható" $\mathbb{R}^k$ -beli gömbbel.

$\exists F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ differenciálható (+..), melyre

$$p \in U \qquad \equiv \qquad F^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$





Definíció. $M \subset \mathbb{R}^n$ SOKASÁG LEZÁRÁSA:

$$\overline{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists (x_i) \subset M, \lim_{i \to \infty} x_i = x\}$$

Állítás. $M \subset \overline{M}$. Miért?

Definíció. A k-dimenziós M SOKASÁG HATÁRA

$$\partial M = \overline{M} \setminus M$$

Mi lesz a korábbi Példákban szereplő sokaságok határa?

Állítás. Ha M *k-dimenziós sokaság*, akkor

∂M vagy $k-1$ dimenziós sokaság, vagy üres halmaz. (Nem trivi!)

$\longrightarrow$ egydimenziós sokaság (görbe) határa?

Példa, gyakorlatról

(Okt. 3.) `Írjuk fel a síkbeli, origó középpontú egységkör paraméterezését az alábbi pontok körül:`

$$P_1(0,1), \qquad P_2(1,0), \qquad P_3(0,-1), \qquad P_4(-1,0)$$

Láthatták, hogy nincs *egyetlen* paraméterezés az egész körvonalra.

Például. (RAJZ?)

$P_1(0,1)$ körül: $\Phi_1 : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\Phi_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$.

$P_2(1,0)$ körül: $\Phi_2 : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $\Phi_2(t) = (\sqrt{1-t^2}, t)$.

Megfelelő paraméterezések $\surd$.

DE! A paraméterezés nem $\forall p$-re egyértelmű.

Nyílt lefedés. (Topologikus terekben is.)

$M \subset \mathbb{R}^n$ adott halmaz

Definíció.

Egy **M** HALMAZ NYÍLT LEFEDÉSE az (U_α), $\alpha \in \mathcal{I}$, ha

1. U_α nyílt $\forall\alpha$,
2. $\forall p \in M$-re $\exists\alpha$, hogy $p \in U_\alpha$.

Alapötlet sokaság definícióhoz:

1. $\forall U_\alpha$-t "azonosítjuk" egy $\mathbb{R}^k$-beli gömbbel,
2. és az $U_\alpha \cap U_\beta$ metszeteken *sima átmenetet* adunk meg.

Paraméteres megadás.

Definíció.

$M \subset \mathbb{R}^n$ egy **k** DIMENZIÓS SOKASÁG, ha $\exists(U_\alpha)$ nyílt lefedése,

és $\forall\alpha$-hoz $\exists\phi_\alpha : V_\alpha \to M$ differenciálható leképezés, melyre

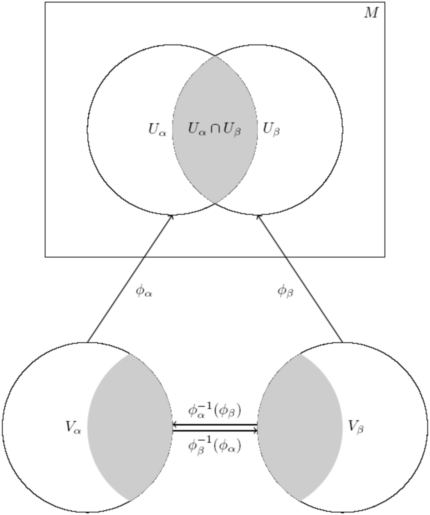
- $V_\alpha \in \mathbb{R}^k$ nyílt gömb, és $\phi_\alpha(V_\alpha) = U_\alpha$,
- ϕ_α *bijekció* V_α és U_α között (egy-egyértelmű).

$p \in U_\alpha$, $p \in \mathbb{R}^n$ (k dimenziós) LOKÁLIS KOORDINÁTÁI:

$$\phi_\alpha^{-1}(p) \in \mathbb{R}^k$$

Ha $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, akkor legyenek

$$V_{\alpha\beta} = \phi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta), \qquad V_{\beta\alpha} = \phi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta).$$



Tfh ϕ_α és ϕ_β KOMPATIBILISEK, azaz

$$\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$$

diff-ható, 1-1 értelmű.

Megj. $\phi_\alpha^{-1}\phi_\beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ típusú.

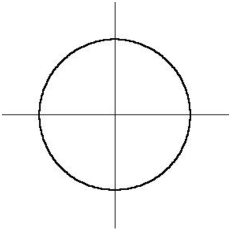
Definíció

Az (U_α, ϕ_α) *pár* LOKÁLIS TÉRKÉP.

Az egész M-et lefedő térképek rendszere $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in \mathcal{I}$ *indexhalmaz*$\}$ ATLASZ.

Háttér. Térképek és térképgyűjtemények.

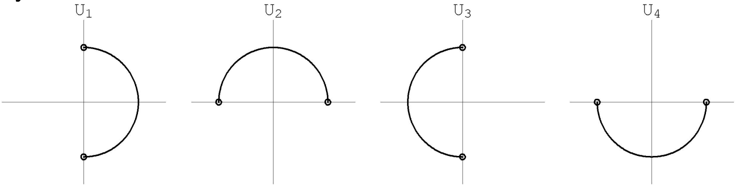
Példa. Síkbeli egysegkör.



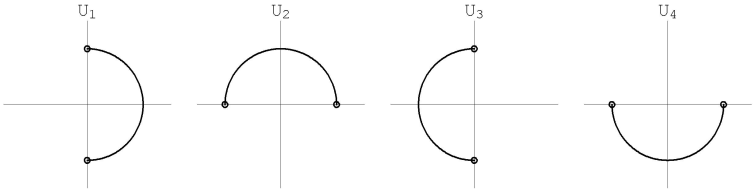
S^1: síkbeli egységkörvonal.

Belátjuk, hogy egydimenziós sokaság.

Nyílt lefedés?



Vajon miért ilyen "sok"?



A térképekhez tartozó $\phi_{1,2,3,4} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ leképezések:

$$\phi_1(x) = (\sqrt{1-x^2}, x), \qquad \phi_2(x) = (x, \sqrt{1-x^2}),$$

$$\phi_3(x) = (-\sqrt{1-x^2}, x), \qquad \phi_4(x) = (x, -\sqrt{1-x^2}).$$

Gyakorlat. Ellenőrizzük a kompatibilitási feltételt például az $U_1 \cap U_2$ halmazon

A differenciálható sokaságokra egy új definíciót adunk.

Definíció. $M \in \mathbb{R}^n$ k DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁG,

ha megadható $n-k$ db n-változós függvény

zérushelyeinek közös részeként.

Más szóval, $\exists \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n-k} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff-ható függvények:

$$M = \bigcap_{i=1}^{n-k} \{\varrho_i = 0\}.$$

Feltesszük, hogy a ϱ_i gradiensei lineárisan függetlenek, azaz

$$\begin{pmatrix} \nabla \varrho_1 \\ \nabla \varrho_2 \\ \vdots \\ \nabla \varrho_{n-k} \end{pmatrix}$$ teljes rangú M pontjaiban.

Példa. Az egységkörvonal $\mathbb{R}^2$-ben egydimenziós sokaság.

Ennek implicit megadása:

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varrho_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}.$$

A gradiensvektor $(2x, 2y)$, a körvonal pontjaiban 1 rangú.

Itt $n = 2$ és $k = 1$.

Példa Adott két 3-változós függvény, $\varrho_1(x, y, z)$ és $\varrho_2(x, y, z)$.

Tekintsük az alábbi halmazt:

$$\{(x, z, y) \ : \ \varrho_1(x, y, z) = 0, \quad \varrho_2(x, y, z) = 0\}.$$

Mindkét függvény nulltere egy-egy felület $\mathbb{R}^3$-ban ("szintfelület").

Ezek egy *görbe* mentén metszik egymást - tipikusan.

Eddigi ismereteink alapján ez 1-*dimenziós sokaság*.

Itt $n = 3$ és $k = 1$.

Példa. S^1 az az $\mathbb{R}^3$-beli egységkör, mely az (x, y) *síkba* esik.

A görbét impliciten megadó két függvény:

$$\varrho_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \text{ (gömb)}, \quad \varrho_2(x, y, z) = z \text{ (sík)},$$

$$\Longrightarrow \qquad S^1 = \{\varrho_1 = 0\} \cap \{\varrho_2 = 0\}.$$

Ekkor $\mathrm{grad}\ \varrho_1 = (2x, 2y, 2z)$ és $\mathrm{grad}\ \varrho_2 = (0, 0, 1)$,

valóban függetlenek az (x, y) síkbeli egységkör pontjaiban.

Itt $n = 3$ és $k = 1$.