Formák
Differenciálformák
1. rész

2020. október 5.

$$"\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega"$$

Motiváció

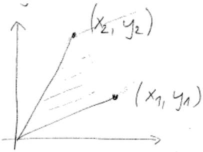
Ehhez szükség van k-dimenziós mértékre a sokaságon.

Eszköz: differenciálformák.

Ezek bevezetését fokozatosan fogjuk megtenni.

Paralelogramma területe

Ismétlés.



A $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ és $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ vektorok által kifeszített paralelogramma (előjeles) területe:

$$T = \det\left(\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

Ez előjeles terület, példák:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{RAJZ} \qquad \det\left(A_1\right) = -2.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{RAJZ} \qquad \det\left(A_2\right) = 2.$$

Paralelogramma területe n dimenzióban

Adottak a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Legyen az $n \times k$ dimenziós mátrix:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}$$

Állítás. $\mathbb{R}^n$-ben a k db vektor által kifeszített paralelotóp k dimenziós mértéke (a terület abszolút értéke):

$$V = \sqrt{\det\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)}.$$

Állítás. $V = \sqrt{\det\,(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})}$.

Példa. Ha $k = 1$, akkor egy vektor hossza (1 dimenziós mértéke):

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}.$$

Speciális esetként tehát a fenti képletet kapjuk.

Bizonyítás. (Vázlat) Ha $k = n$ akkor $\det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T$ miatt,

$$\sqrt{\det\,(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}})} = \sqrt{\det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \cdot \det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}} = \sqrt{(\det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}})^2} = |\det\,\underline{\underline{\mathbf{A}}}|,$$

tehát a tétel igaz.

Ha $k < n$, akkor

$$(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} |v_1|^2 & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_2 \rangle & |v_2|^2 & \dots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \dots & \langle v_{k-1}, v_k \rangle & |v_k|^2 \end{pmatrix}$$

Térbeli forgatással $|v_i|^2$ és $\langle v_i, v_j \rangle$ nem változik.

Tehát a forgassunk:

———> első k db koordináták bármi, 0-tól különbözők,

az *utolsó* $n - k$ *db legyen* 0.

———> visszajutunk az $n = k$ speciális esethez.

Elemi formák $\mathbb{R}^3$-ban I.

Ami "látható":

Elemi 1-forma egy leképezés:

$$\text{vektor} \longmapsto \text{koordinátatengelyre vett vetület hossza}$$

Definíció

ELEMI 1-FORMÁK: $\mathrm{d}x_1,\ \mathrm{d}x_2,\ \mathrm{d}x_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Definició szerint $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ *esetén*

$$\mathrm{d}x_1(\mathbf{v}) := v_1, \quad \mathrm{d}x_2(\mathbf{v}) := v_2, \quad \mathrm{d}x_3(\mathbf{v}) := v_3.$$

Elemi formák $\mathbb{R}^3$-ban II.

Elemi 2-forma:

két vektor $\longmapsto$ koordináta síkokra vett vetület területe

Definíció

ELEMI 2-FORMÁK: $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j$, $1 \leq i < j \leq 3$ *leképezés:*

$$dx_i \wedge dx_j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Ha $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *és* $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$, *akkor definíció szerint*

$$\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Elemi formák $\mathbb{R}^n$-ben I.

Definíció

ELEMI 1-FORMÁK: $\mathrm{d}x_1, \ \ldots, \ \mathrm{d}x_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$;

$$\mathrm{d}x_j(\mathbf{v}) = v_j, \qquad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

$\mathrm{d}x_j(\mathbf{v})$: j-edik koordináta irányába eső vetület előjeles hossza.

Elemi 1-**formákból** ennyi-féle van: n.

Elemi formák $\mathbb{R}^n$-ben II.

Definíció

ELEMI 2-FORMA: *2 vektor által kifeszített paralelogramma (x_i, x_j) síkra eső vetületének előjeles területe.*

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad 1 \le i < j \le n.$$

$$\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} v_i & w_i \\ v_j & w_j \end{vmatrix}.$$

Vajon $\mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_i = ?$ ha lenne?

Praktikusan: a két oszlopvektor mátrixának i-edik és j-edik sorát vesszük, és a két sorból alkotott mátrix determinánsát számoljuk.

Elemi 2**-formák száma** $\binom{n}{2}$

Elemi k-formák $\mathbb{R}^n$-ben.

Elemi k-formák:

Definíció

$I = \{i_1, \ldots i_k\}$ *indexhalmaz, melyre*

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n.$$

Ekkor a $\mathrm{d}x_I$ ELEMI k-FORMA*:* $\mathrm{d}x_I \; : \; \mathbb{R}^{n \times k} \to \mathbb{R}$*:*

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n \times k} \text{mátrix:} \qquad \mathrm{d}x_I(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) := \det \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix},$$

ahol A_{i_j} az $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mátrix i_j-edik sorvektora.

Elemi k-formákból ennyi féle van: $\binom{n}{k}$.

Általános formák. I.

Definíció

1-*forma* *egy* $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lineáris leképezés.*

Példa. Legyen $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

$$\omega(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^{n} j v_j, \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \sum_{j=1}^{n} j \, \mathrm{d}x_j.$$

Következmény. $\forall \omega$ 1-forma: elemi 1-formák lineáris kombinációja.

Az n dimenziós 1-formák VEKTORTERE $\bigwedge^1(\mathbb{R}^n)$.

Ebben a VT-ben az elemi 1 formák *bázist* alkotnak. Miért?

Általános formák. II.

Definíció

*Az $\omega : \mathbb{R}^{n\times k} \to \mathbb{R}$ leképezés k-*FORMA*, ha multilineáris és alternáló.*

$$\omega = \omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{v}_j \in \mathbb{R}^n.$$

Azaz minden $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ változóban ω

- *multilineáris,*

$$\omega(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_k) = \alpha\omega(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) + \beta\omega(\mathbf{w}, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

- *és két változót felcserélve ω értéke -1-szeres lesz.*

$$\omega(\mathbf{v}_1, (\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k) = (-1)\omega(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$$

Az n dimenziós k-formák vektortere $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$.

Példa. $\mathbb{R}^3$-ban adottak $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$

Vajon általános *2- forma-e?*

1. $\omega(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{3} v_i w_i$.
2. $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_1 w_3 - v_3 w_1$.
3. $\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{3} (-1)^i v_i w_{3-i}$.

Gy. Igazoljuk, hogy $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$-an az elemi k-formák bázist alkotnak.
Ezért $\dim \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}$.

Definíció

$\mathbb{R}^n$*-ben* ELEMI 0-FORMÁK *a valós számok.*

Külső szorzat. I.

Legyen τ egy k-forma és λ egy l-forma.

Definíció

Ezek KÜLSŐ SZORZATA *(WEDGE product, ÉK szorzat),*

egy $k+l$-forma :

$$\tau \wedge \lambda \in \bigwedge^{k+l}(\mathbb{R}^n)$$

Ezt **elsőként a bázisvektorokon** *definiáljuk.*

Legyen $I = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n\}$, $J = \{1 \leq j_1 < \cdots < j_l \leq n\}$.

- *Ha* $I \cap J = \emptyset$, *akkor* $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = \mathrm{d}x_{I \cup J}$ *(sorrendben!)*
- *Ha* $I \cap J \neq \emptyset$, *akkor* $\mathrm{d}x_I \wedge \mathrm{d}x_J = 0$.

Vajon miért így?

Külső szorzat. példák

$\mathbb{R}^4$-ben τ egy 1-forma és λ egy 2-forma:

1. $\tau = dx_1$ és $\lambda = dx_2 \wedge dx_4$. $\implies \tau \wedge \lambda = ?$
2. $\tau = dx_3$ és $\lambda = dx_2 \wedge dx_3$. $\implies \tau \wedge \lambda = ?$
3. $\tau = dx_4$ és $\lambda = dx_2 \wedge dx_3$. $\implies \tau \wedge \lambda = ?$

Külső szorzat. II.

Kiterjeszjük általános formákra az alábbi tulajdonságokkal:

τ egy k-forma és λ egy l-forma, γ egy m-forma. A külső szorzat:

1. Asszociatív: $(\tau \wedge \lambda) \wedge \gamma = \tau \wedge (\lambda \wedge \gamma)$.
2. Disztributív: $\omega \wedge (\lambda + \tau) = \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \tau$.
3. $\tau \wedge \lambda = (-1)^{kl} \lambda \wedge \tau$.

Külső szorzat. Általános definíció

Legyen τ egy k-forma és λ egy ℓ-forma. $\tau \wedge \lambda$ egy $k+\ell$-forma lesz.

1 és $k+\ell$ között kiválasztunk k darab indexet $\sigma_1, \dots, \sigma_k$.

A kihagyott ℓ darab indexet növekvő sorrendben:

$$\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_{k+\ell}.$$

Ez (σ_j) az $\{1, 2, \dots k+\ell\}$ egy permutációja.

Definíció

τ és λ külső szorzata $\tau \wedge \lambda : \mathbb{R}^{n\times(k+l)} \to \mathbb{R}$*:*

$$\tau \wedge \lambda(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+\ell}) = \sum_{\sigma} (-1)^{|\sigma|} \tau(\mathbf{v}_{\sigma_1}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_k}) \cdot \lambda(\mathbf{v}_{\sigma_{k+1}}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma_{k+\ell}})$$

ahol $|\sigma|$ *a permutáció inverzióinak száma.*

Példa. "Ellenőrzés".

$\mathbb{R}^3$-ban $\tau = dx_1$ és $\omega = dx_2$. Vajon

$$\tau \wedge \omega \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{pmatrix} =?$$

Lehetséges permutációk: $\sigma_1 = \{1, 2\}$ és $\sigma_2 = \{2, 1\}$

$$\sigma_1: \qquad dx_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1, \quad dx_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2.$$

$$\sigma_2: \qquad dx_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1, \quad dx_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2.$$

$$\Longrightarrow \qquad \tau \wedge \omega = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$ Hasonlít vmire?

Differenciálformák I. "Helytől függő" formák.

- DIFFERENCIÁL 0-FORMA: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, diff-ható skalármező
- DIFFERENCIÁL 1-FORMA:

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}x_j,$$

ahol $\mathrm{d}x_j$ elemi 1-forma, és $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff-ható függvény.

- DIFFERENCIÁL k-FORMA:

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I \, \mathrm{d}x_I,$$

ahol $\mathcal{I}$ a k elemű indexhalmazok részhalmaza, $\mathrm{d}x_I$ egy elemi k-forma, és $f_I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény.

Differenciálformák külső deriválása

Ha ω differenciál k-forma, akkor $d\omega$ differenciál $k+1$-forma

Definíció

- *Ha f egy differenciál* 0*-forma, akkor* **külső deriváltja**

$$\mathrm{d}f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i.$$

- *Ha $\omega = f\,\mathrm{d}x_I$ differenciál k-forma, akkor* **külső deriváltja**

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}(f\,\mathrm{d}x_I) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\,\mathrm{d}x_i \wedge \,\mathrm{d}x_I).$$

Példa.

$\mathbb{R}^2$-ben egy differenciál 0 forma:

$$\omega = f(x, y) = x^2 y + 2y^3.$$

Külső deriváltja:

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}f = 2xy\ \mathrm{d}x + (x^2 + 6y^2)\ \mathrm{d}y.$$

Kiszámoljuk $\mathrm{d}(\mathrm{d}f)$-et. Tagonként deriválva:

$$\mathrm{d}(2xy\ \mathrm{d}x) = \underbrace{2y\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}x}_{=0} + 2x\ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = -2x\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}((x^2 + 6y^2)\ \mathrm{d}y) = 0 + 2x\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f) = \mathrm{d}(2xy\ \mathrm{d}x) + \mathrm{d}((x^2 + 6y^2)\ \mathrm{d}y) = 0.$$

Differenciálformák külső deriváltja (folyt.)

Definíció

- *Az* $\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}} f_I \, \mathrm{d}x_I$ *differenciál* k*-forma külső deriváltja*

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}} \mathrm{d}f_I \wedge \mathrm{d}x_I.$$

- *Általános esetben, ha* $\omega = \sum_i \omega_i$, *akkor* $\mathrm{d}\omega = \sum_i \mathrm{d}\omega_i$.

Megjegyzés. Ha ω differenciál n-forma $\mathbb{R}^n$-ben, akkor $d\omega = 0$.

LEMMA (POINCARRÉ LEMMA) $\forall\omega$ differenciál k-formára:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0.$$