Matematikai Analízis III.

4. előadás

2020. szeptember 28.

Divergencia tétel (G-O tétel)

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező.

$M \subset \mathbb{R}^3$ korlátos térrész. $\partial M = S$ **zárt** felület. Ekkor

$$\oiint_S F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_M \mathrm{div}\,(F)\,\mathrm{d}(x, y, z).$$

Stokes tétel

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható.

$S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, $\partial S = C$ sima, **zárt** görbe. Ekkor

$$\oint_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

N-L formula: $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$

Görbe irányítása

Kétféle irányítás van:

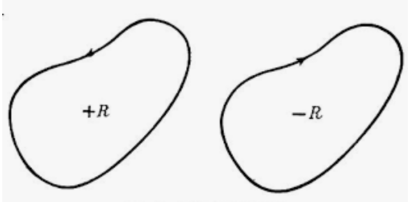
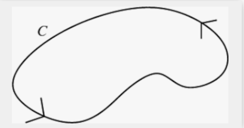


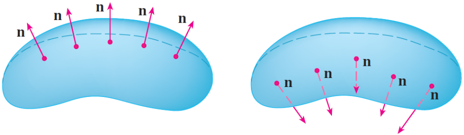
Fig. 7.—Oriented regions

Zárt görbe **pozitív irányítása**



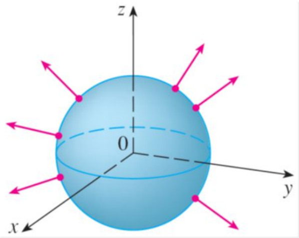
Felület irányítása.

Felület irányítása kétféle lehet.



Zárt felület **pozitív** irányítása:

kifelé mutatnak a normálvektorok.

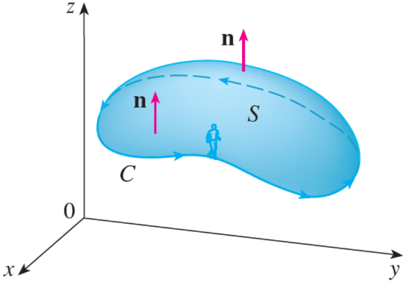


A Stokes tételben adottak:

– *n*: a *felület* egységnyi normálvektorai

– *T*: a határoló *görbe* egységnyi hosszú érintővektorokai.

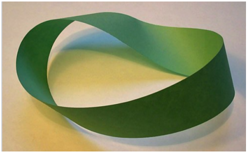
A *felület* és *görbe* irányítása **kompatibilis**.



Vektormezők felületi integráljának értelmezéséhez:

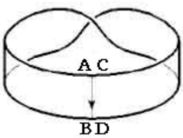
$\longrightarrow$ *ki kell zárni a **nem irányítható** felületeket*.

Ilyen pl. a Möbius szalag.



Miért nem irányítható?

Ennek konstrukciója



Speciálisan?

Tétel (Klasszikus Stokes tétel)

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diff-ható vektormező. $S \subset \mathbb{R}^3$ sima *irányítható* felület, $\partial S = C$ sima, **zárt** görbe. S és C *irányítása kompatibilis*. Ekkor

$$\oint_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S}$$

Tegyük fel, hogy S határa üres, $C = \emptyset$. Ekkor S **zárt** felület.

$$\oint_C F((\underline{r}))\,\mathrm{d}\underline{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S}, \qquad S \quad \text{zárt}, \quad C = \emptyset.$$

A baloldal: $\oint_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = 0$, hiszen $C = \emptyset$.

A jobboldal? $\oiint_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S}$, hiszen S **zárt**.

$\longrightarrow$ Alkalmazhatjuk a G-O tételt:

$$\oiint_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_M \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,(F))\,\mathrm{d}V = \iiint_M 0\,\mathrm{d}V = 0,$$

ahol M az S **zárt** felülettel közrezárt térrész.

Vonalintegrál $\mathbb{R}^2$-ben újra

Adott $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenciálható vektormező, $F(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$.

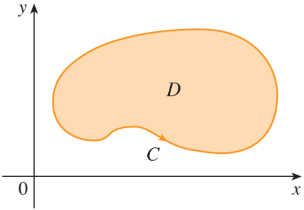
$D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, összefüggő tartomány.

$C = \partial D$ zárt görbe, $C = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]\}$.

$$\begin{aligned} \oint_C F(x,y)d\mathbf{s} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \\ &= \underbrace{\int_a^b P(\gamma(t))\dot{x}(t)dt}_{\oint_C Pdx} + \underbrace{\int_a^b Q(\gamma(t))\dot{y}(t)dt}_{\oint_C Qdy}. \end{aligned}$$

Green Tétel. C pozitív irányítású, zárt görbe.

$D \subset \mathbb{R}^2$ korlátos összefüggő tartomány, amit C körbevesz.



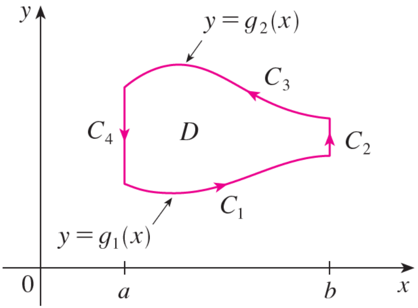
$P, Q : D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Ekkor

$$\oint_C (P \, dx + Q \, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Megjegyzés. A jobboldalon ”rotáció”-szerű: $Q'_x - P'_y = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ P & Q \end{vmatrix}$

1. Bizonyítás.

Közvetlenül, pl. D normáltartomány:



2. Bizonyítás. Speciális Stokes tétellel. **(HF*)**

Példa. (2. gyakorlaton szereplő feladat volt)

Adott a síkon a C egységnégyzet, melynek átellenes csúcsai $(0,0)$ és $(1,1)$, körbejárás az óramutató járásával egyező. Mennyi a cirkulációja az $F(x,y)=(x,y)$ vektormezőnek C-re vonatkozóan?

Megoldás a Green tétellel.

$$P(x,y)=x, \qquad Q(x,y)=y.$$

Így a vonalintegrál:

$$\oint_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = \oint_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint_D (Q'_x - P'_y)\,\mathrm{d}(x,y) = 0.$$

Alkalmazás.

1. Példa. $P(x,y) = -y$ és $Q(x,y) = 0$. Ekkor

$$\oint_C -y\,\mathrm{d}x = \iint_D 1\,\mathrm{d}(x,y) = A(D) \text{ terület!}$$

2. Példa. $P(x,y) = 0$ és $Q(x,y) = x$. Ekkor

$$\oint_C x\,\mathrm{d}y = \iint_D 1\,\mathrm{d}(x,y) = A(D) \text{ terület!}$$

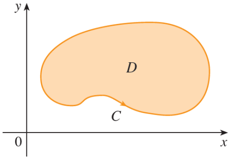
A jobb oldalon mindkét egyenletben a *D tartomány terület*e van.

Területszámítás Green tétellel.

Tfh $D \subset \mathbb{R}^2$ határának paraméterezése:

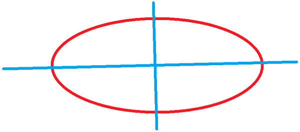
$$C = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]\}\,.$$

Ekkor D területe háromféleképpen is számolható:



$$\begin{aligned} A(D) &= -\oint_C y\,\mathrm{d}x = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t, \\ &= \oint_C x\,\mathrm{d}y = \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Ellipszis területe



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A görbe paraméterezése:

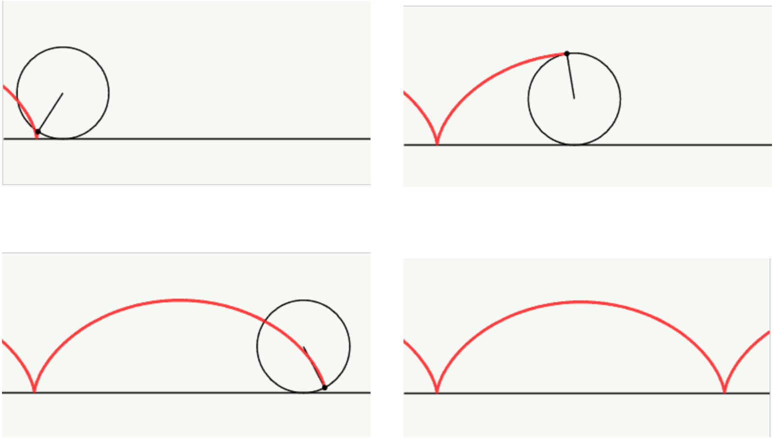
$$x(t) = a\cos(t), \quad y(t) = b\sin(t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Alkalmazzuk a Green tételből kapott formulát:

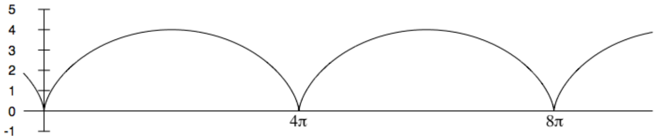
$$A(D) = -\oint_C y \, \mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} y(t)\dot{x}(t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= -\int_0^{2\pi} b\sin(t) \cdot (-a\sin(t)) \, \mathrm{d}t = ab \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, \mathrm{d}t = ab \cdot \pi.$$

Cikloid



Egy cikloid-ív alatti terület



A görbét meghatározó egyenletek, ahol $a > 0$ szabad paraméter:

$$\begin{aligned} x(t) &= a\,(t - \sin(t)) \\ y(t) &= a\,(1 - \cos(t)) \end{aligned} \qquad t \in [0,\ 2\pi].$$

$x(t) = a(t - \sin(t)),\ y(t) = a(1 - \cos(t))$

A területszámításra ezt összefüggést fogjuk használni:

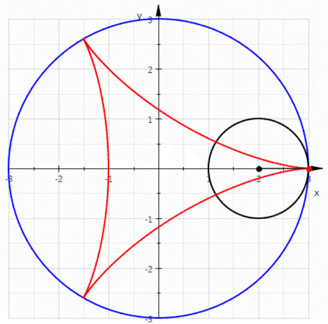
$$A(D) = -\oint_C y \,\mathrm{d}x = -\int_a^b y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t.$$

A vízszintes szakaszon $y = 0 \Rightarrow$ csak az ív mentén integrálunk.

$\dot{x}(t) = a(1 - \cos(t))$

$$\begin{aligned} A(D) &= -\oint_C y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a^2\,(1-\cos(t))^2\,\mathrm{d}t = \\ &= a^2\left(\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t - 2\int_0^{2\pi}\cos(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,\mathrm{d}t\right) = \\ &= a^2\,(2\pi + 0 + \pi) = 3\pi a^2. \end{aligned}$$

Feladat. Számoljuk ki egy deltoid területét.



A deltoidot határoló görbe paraméteres megadása:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(t) + \cos(2t), \\ y(t) &= 2\sin(t) - \sin(2t), \qquad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Szummázat

Divergencia tétel (G-O tétel). $\oiint\limits_S F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_M \mathrm{div}\,(F)\,\mathrm{d}V.$

Stokes tétel. $\oint\limits_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\,(F)\,\mathrm{d}\mathbf{S}$

Green Tétel. $\oint\limits_C (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)\,\mathrm{d}(x, y).$

Mindhárom tétel:

„*A függvény deriváltjának integrálja egy tartomány belsejében egyenlő a függvény megváltozásával a tartomány határán*".

N-L formula: $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$

Általánosítás

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M \mathrm{d}\omega}$$

Ehhez szükségs fogalmak:

M: sokaság.

ω: differenciálforma.

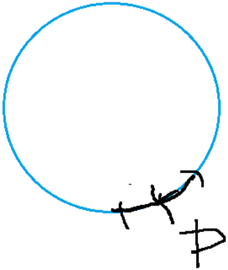
$\longrightarrow$ DIFFERENCIÁLGEOMETRIA

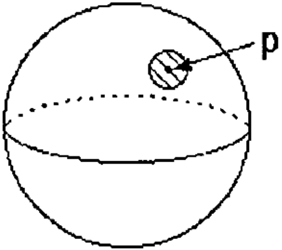
Sokaság ”messziről”

”Mese.” Einstein: általános relativitáselmélete.

(Lényegében.) k dimenziós sokaság $\mathbb{R}^n$-ben:

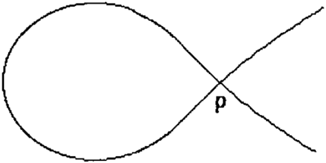
$$\forall p \text{ pont környezete} \approx k\text{-dim ”gömb”}.$$

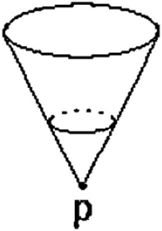




Sokaság paraméteres megadás

Amit ki fogunk zárni:





$\Longrightarrow$ Nincs érintő.

Definíció. $M \subset \mathbf{R}^n$ egy **k**-DIMENZIÓS DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁG

ha $\forall p \in M$-nek $\exists U$ környezete, melyhez

- $\exists F : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ differenciálható VM,
- és $\exists V \subset \mathbf{R}^k$ **nyílt** halmaz

melyre

- $F(V) = U \cap M$, és ez egy-egyértelmű,
- A DF mátrix, mely $n \times k$-dim, rangja k

A fenti F a sokaság p pont körüli LOKÁLIS PARAMÉTEREZÉSE.

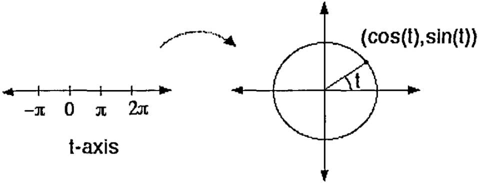
Megjegyzés. $k \leq n$.

1. Példa

$\mathbb{R}^2$-ben az origó középpontú egység-körvonal 1 dimenziós sokaság.

Ugyanis: $p = (1, 0)$ körül egy lehetséges paraméterezés:

$F : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, ahol $F(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in (-\pi, \pi)$.

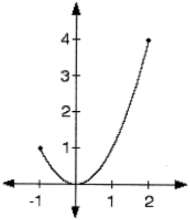


A Jacobi mátrix $DF(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ valóban 1 rangú $\forall t$.

Ebben a példában $n = 2$, és $k = 1$.

2. Példa

Az alábbi görbe pontjai egydimenziós sokaságot adnak a síkon.



$$F : (-1, 2) \to \mathbf{R}^2,$$

$$F(t) = (t, t^2),$$

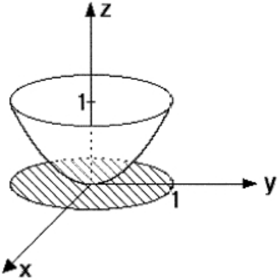
$$V = (-1, 2).$$

A Jacobi mátrix $\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ valóban teljes rangú minden t esetén.

Ebben a példában $n = 2$, és $k = 1$.

3. Példa

Az alábbi térbeli felület pontjai 2-dimenziós sokaság $\mathbb{R}^3$-ban.



$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

$$F(x, y) = (x, y, x^2 + y^2),$$

$$V = \{x^2 + y^2 < 1\}.$$

A Jacobi mátrix: $DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$

Kiegészítések.

1. **0 dimenziós sokaság**: legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok pontból álló halmaz.

2. Egyelőre csak olyan M görbe lehet sokaság, amely *nem tartalmazza a végpontjait* - ha vannak,- mert a végpontok környezetei $\not\approx$ egydimenziós intervallumok.

   Ugyanígy csak a **határoló görbét nem tartalmazó felület** számít sokaságnak.