Matematikai Analízis III.

3. előadás

2020. szeptember 21.

Ismétlés. Felületi integrál

$S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, ha $\exists D \subset \mathbb{R}^2$ öf. és $\exists s : D \to \mathbb{R}^3$ diffható:

$$S = \left\{ s(u, v) \ : \ (u, v) \in D \right\}.$$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ FELÜLETI INTEGRÁLJA az S felület mentén:

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, \mathrm{d}S = \iint\limits_D f(s(u, v)) \cdot \underbrace{|s'_u \times s'_v|\, \mathrm{d}(u, v)}_{\approx \text{helyettesítés}}.$$

Formálisan: $\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial s}{\partial u} \times \frac{\partial s}{\partial v} \textit{normálvektor hossza} \right) \mathrm{d}(u, v)$

Vektormező felületi integrálja.

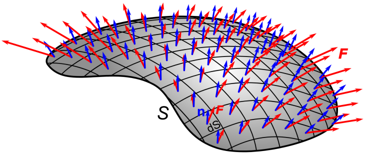
$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ FELÜLETI INTEGRÁLJA az S felület mentén:

$$\iint\limits_S F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint\limits_S F \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S = \iint\limits_D \langle F(s(u,v)) \cdot (s'_u \times s'_v) \rangle \, \mathrm{d}(u,v),$$

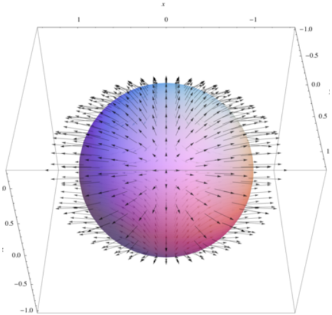
ahol a felület egységnyi normálvektorai $\underline{n}$.

Fluxus jelentése:

Mennyire *"nyomul át"* F a felületen.



Speciálisan: Fluxus **zárt** felületen át.



Mennyire *”nyomul át”* a vektormező a felszínen?

$\equiv$ Amennyi belülről *szétterjed*.

Szétterjedés mértéke a *divergencia*.

Tétel (Divergencia tétel / Gauss-Osztrogradszkij tétel)

*$M \subset \mathbb{R}^3$ egy korlátos térrész, ∂M a határoló **zárt** felület.*

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Ekkor

$$\oiint\limits_{\partial M} F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_{M} \mathrm{div}\,(F) \, \mathrm{d}(x, y, z).$$

(Átfogalmazva)

∂M pontjaiban egység hosszú (kifelé mutató) normálvektorok, $\underline{n}$.

$$\iiint\limits_{M} \mathrm{div}\,(F) \, \mathrm{d}(x, y, z) = \oiint\limits_{\partial M} F \cdot \underline{n}. \, \mathrm{d}S.$$

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(F)\, \mathrm{d}(x,y,z) = \oiint\limits_{\partial M} F \cdot \underline{n}.\, \mathrm{d}S.$$

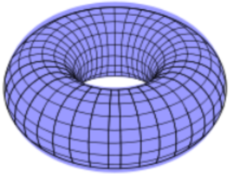
1. **Baloldal:** *Vektormező divergenciájának* a térrész belsejében vett térfogati *hármas integrálja*
2. **Jobboldal:** *Vektormezőnek* a határoló felületre vett *felületi integrálja*

Ismerős?

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Kiegészítések bizonyítás előtt.

1. Megjegyzés. A Tételbeli M halmaz lehet *lyukas* is, például *tórusz*.



2. Megjegyzés. $\operatorname{div}(F) \equiv$ mennyire ”terül szét”a vektormező.

   Ennek értéke lehet negatív is, pl egy nyelő esetén.

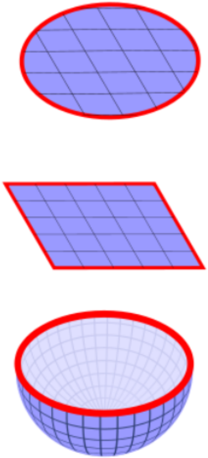
   Ha F folyadék áramlása, akkor *befelé* folyik a folyadék.

3. Megjegyzés. Feltettük, hogy M **határa zárt**.

   Nem azt jelenti, hogy topológiai értelemben zárt: ”*minden határpontját tartalmazza*”.

   Zárt felület $\equiv$ teljesen közrezár egy térrészt.

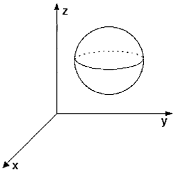
   Pl. **nem zárt**:



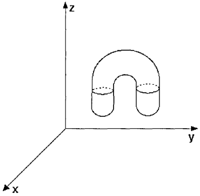
$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \oiint\limits_{\partial M} F \cdot \underline{n}.\,\mathrm{d}S.$$

Bizonyítás. (Vázlat)

Tfh M egyszerű tér-rész, normáltartomány.



egyszerű



nem egyszerű

$$\iiint\limits_{M} \operatorname{div}(F)\, \mathrm{d}(x,y,z) = \oiint\limits_{\partial M} F \cdot \underline{n}.\, \mathrm{d}S.$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad \|\underline{n}\| = 1$$

Igazolni kell, hogy

$$\iiint\limits_{M} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \mathrm{d}(x,y,z) = \oiint\limits_{\partial M} (f_1 n_1 + f_2 n_2 + f_3 n_3)\, \mathrm{d}S.$$

Tagonkénti egyenlőséggel bizonyítható. Most ezt fogjuk belátni:

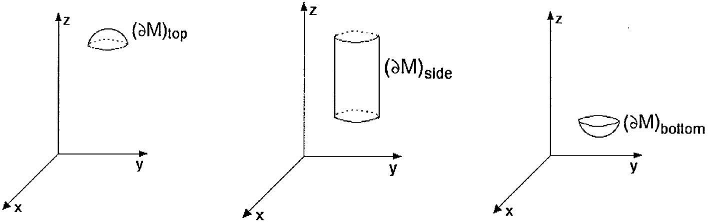
$$\iiint\limits_{M} \frac{\partial f_3}{\partial z}\, \mathrm{d}(x,y,z) = \oiint\limits_{\partial M} f_3 n_3\, \mathrm{d}S.$$

$$\oiint\limits_{\partial M} f_3 n_3 \, \mathrm{d}S = \iiint\limits_{M} \frac{\partial f_3}{\partial z} \, \mathrm{d}(x, y, z)$$

M egy (x, y) sík szerinti normáltartomány: $\exists D \subset \mathbf{R}^2$, $\exists b, t : D \to \mathbf{R}$:

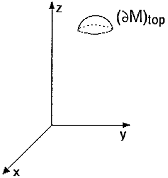
$$M = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ b(x, y) \le z \le t(x, y)\}.$$

Írjuk fel ∂M-t 3 tartomány uniójaként, n_3 előjelétől függően:



$\{n_3 > 0\} \ : \ \partial M_t$ $\quad$ $\{n_3 = 0\} \ : \ \partial M_s$ $\quad$ $\{n_3 < 0\} \ : \ \partial M_b$

$$\partial M = \partial M_t \cup \partial M_s \cup \partial M_b \quad \Longrightarrow \quad \iint\limits_{\partial M} f_3 n_3 \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{\partial M_t} \ldots + \cancel{\iint\limits_{\partial M_s} \ldots} + \iint\limits_{\partial M_b} \ldots$$



$$\underline{n} = (-t'_u, -t'_v, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}}$$

$$\Downarrow$$

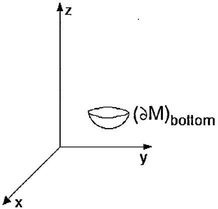
$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2}}.$$

$\{n_3 > 0\} \ : \ \partial M_t$

$$\iint\limits_{\partial M_t} f_3 n_3 \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{D} f_3(u, v, t(u, v)) \, n_3(u, v, t(u, v)) \sqrt{1 + (t'_u)^2 + (t'_v)^2} \, \mathrm{d}(u, v) =$$

$$= \iint\limits_{D} f_3(u, v, t(u, v)) \, \mathrm{d}(u, v).$$

Az $\{n_3 < 0\}$: $\partial M_b = \{(u, v, b(u, v))\}$ halmazon:



$$\underline{n} = (b'_u, b'_v, -1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (b'_u)^2 + (b'_v)^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$n_3 = -\frac{1}{\sqrt{1 + (b'_u)^2 + (b'_v)^2}}.$$

$$\iint\limits_{\partial M_b} f_3 n_3 \, \mathrm{d}S = \ldots = -\iint\limits_{D} f_3(u, v, b(u, v)) \, \mathrm{d}(u, v).$$

Be kell látni: $\iint\limits_{\partial M} f_3 n_3 \,\mathrm{d}S = \iiint\limits_{M} \frac{\partial f_3}{\partial z} \,\mathrm{d}(x,y,z)$

Eddig

$$\oiint\limits_{\partial M} f_3 n_3 \,\mathrm{d}S = \iint\limits_{D} \left(f_3(u,v,t(u,v)) - f_3(u,v,b(u,v))\right) \,\mathrm{d}(u,v).$$

A térfogati integrál:

$$\iiint\limits_{M} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \,\mathrm{d}(x,y,z) = \iint\limits_{D} \int\limits_{b(x,y)}^{t(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}(x,y) =$$

$$= \iint\limits_{D} \left(f_3(x,y,t(x,y)) - f_3(x,y,b(x,y))\right) \,\mathrm{d}(x,y). \quad \surd \quad \text{Miért}$$

Példa. $F(x,y,z) = (x,y,z)$. $\mathrm{div}\, F = 3$.

M az origó körüli r sugarú gömb felső fele.

A térfogati integrál:

$$\iiint_M \mathrm{div}\, F \,\mathrm{d}(x,y,z) = 3 \cdot \frac{2}{3} r^3 \pi = 2r^3\pi.$$

A felület: $\partial M = S = S_1 \cup S_2$.

- S_1 a félgömb felülete. Itt $\underline{n}_1(x,y,z) = \frac{1}{r}(x,y,z)$
- S_2 az alsó körlap.Itt $\underline{n}_2(x,y,z) = (0,0,-1)$.

RAJZ

Az S_1-en vett integrál:

$$\iint_{S_1} F \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = \iint_{S_1} (x,y,z) \cdot \frac{1}{r}(x,y,z)\, \mathrm{d}S = \iint_{S_1} \frac{x^2+y^2+z^2}{r}\, \mathrm{d}S =$$

$$= \iint_{S_1} r\ \ \mathrm{d}S = r \cdot A(S_1) = r \cdot 2r^2\pi = 2r^3\pi.$$

Az S_2-n vett integrál:

$$\iint_{S_2} F \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = \iint_{S_2} (x,y,z) \cdot (0,0,-1)\, \mathrm{d}S = \iint_{S_2} (-z)\, \mathrm{d}S = 0.$$

A felületi integrál összesen:

$$\oiint_{S_1 \cup S_2} F\, \mathrm{d}\underline{S} = 2r^3\pi = \iiint_M \operatorname{div} F\, \mathrm{d}(x,y,z).$$

Következmény

Tfh F vektorpotenciálos, azaz $\exists G$ diffható vektormező: $F = \mathrm{rot}\,(G)$.

Ekkor $\mathrm{div}\,(F) = \mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,(G)) = 0$.

Ezért $\forall S \subset \mathbb{R}^3$ sima **zárt** felületre, ha a közrezárt térrész M:

$$\oiint_S F \,\mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_M \mathrm{div}\,(F)\,\mathrm{d}(x, y, z) = 0$$

Sőt, fordítva is igaz:

Állítás. A következő állítások ekvivalensek:

1. F vektorpotenciálos
2. $\forall S \subset \mathbb{R}^3$ **zárt** felületre $\oiint_S F \,\mathrm{d}\mathbf{S} = 0.$

Tétel (Klasszikus Stokes tétel)

Adott $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező.

Legyen $M \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, melynek határa ∂M sima, **zárt** görbe.

Ekkor

$$\iint\limits_{M} \operatorname{rot}(F)\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint\limits_{\partial M} F(\underline{r})\, \mathrm{d}\underline{r}.$$

$\Longrightarrow$ *A felületen "össz-rotáció"* $\equiv$ *A felület határán a cirkuáció.*

1. *Megjegyzés.* Átfogalmazzuk a Stokes tételt. Legyenek

– $\underline{n}$: a felület egységnyi *normálvektorai*

– T: a görbe egységnyi hosszú *érintővektorokai.*

Ekkor

$$\iint\limits_{M} \mathrm{rot}\,(F)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S = \oint\limits_{\partial M} F\cdot T\,\mathrm{d}s.$$

2. *Megjegyzés.* Legyen a görbe paraméterezése:

$$\partial M = \{\gamma(t)\in\mathbb{R}^3 : t\in[a,b]\}.$$

Ekkor az egységnyi hosszú érintővektorok: $T = \dfrac{\dot\gamma(t)}{|\dot\gamma(t)|}$.

Bizonyítás "helyett" példák.

$$\iint_M \mathrm{rot}\,(F)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\partial M} F\cdot T\,\mathrm{d}s.$$

1. *Példa.* $F = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, M: egységsugarú gömb felső fele. RAJZ—

A vonalintegrál. $\partial M =$ egységkör az (x, y) síkban.

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \qquad \dot\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0) = T.$$

$$\Longrightarrow \quad \oint_{\partial M} F\cdot T\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \langle(\cos(t), \sin(t), 0)\,,\ (-\sin(t), \cos(t), 0)\rangle\,\mathrm{d}t = 0.$$

A felületintegrál: $\mathrm{rot}\,(F) = \ldots 0$. $\Rightarrow \iint_M \mathrm{rot}\,(F)\cdot \underline{n}\,\mathrm{d}S = 0$

$$\iint_M \mathrm{rot}\,(G) \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S = \oint_{\partial M} G \cdot T\, \mathrm{d}s.$$

2. *Példa.* $G = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$ és M mint az előbb.

Jobboldal. $\partial M = \{\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) : t \in [0, 2\pi]\}$.

$$\langle G(\gamma(t))\ ,\ \dot{\gamma}(t) \rangle = \langle (\sin(t), 0, \cos(t))\, ,\, (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle = -\sin^2(t).$$

$$\oint_{\partial M} G \cdot T\, \mathrm{d}s = -\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, \mathrm{d}t = -\pi.$$

Az egyenlet bal oldala?

$$\mathrm{rot}\,(F) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1,-1,-1), \qquad \underline{n}(x,y,z) = (x,y,z).$$

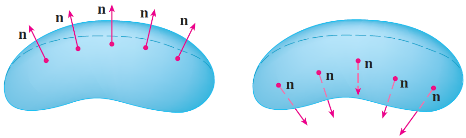
$$\iint_M \mathrm{rot}\,(F)\cdot\underline{n}\,\mathrm{d}S = \iint_M \langle(-1,-1,-1),(x,y,z)\rangle\ \mathrm{d}S = -\iint_M (x+y+z)\,\mathrm{d}S =$$

$= $ *"a felület paraméterezése + számolás"* ...

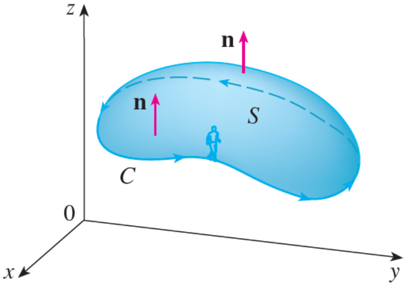
$$= -\pi.$$

Az irányításról.

Felület (és görbe) irányítása kétféle lehet.



A Stokes tételben a felület és a határoló görbe irányítása **kompatibilisek**.



Speciális eset.

Tétel (Klasszikus Stokes tétel)

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. $M \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, melynek határa ∂M sima, **zárt** görbe. Továbbá

- $\underline{n}$: a felület egységnyi *normálvektorai*
- T: a görbe egységnyi hosszú *érintővektorokai.*

$$\iint_M \operatorname{rot}(F) \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S = \oint_{\partial M} F \cdot T \, \mathrm{d}s.$$

Mit mondhatunk, ha M határa üres, $\partial M = \emptyset$?