# Matematikai Analízis III.

2. előadás

2020. szeptember 14.

## Ismétlés

$F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ VEKTORPOTENCIÁLOS, ha $\exists G : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, amelyre

$$\mathrm{rot}\,(G) = F$$

$G$ az $F$ VEKTORPOTENCIÁLJA. Egyértelmű-e?

## Állítás

*A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

1. *$F$ vektorpotenciálos.*
2. $\mathrm{div}\,(F) = 0$.

# Skalárpotenciál (A2 ismétlés)

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező SKALÁRPOTENCIÁLOS, ha $\exists f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *skalármező,* melyre $F = \operatorname{grad} f$.

Tfh $F$ skalárpotenciálos. $\exists f$ diff-ható valós fv: $F = (f'_x, f'_y, f'_z)$. Ekkor

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial}{\partial x} f'_x + \frac{\partial}{\partial y} f'_y + \frac{\partial}{\partial z} f'_z = \triangle f. \quad \text{mit jelent?}$$

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \cdots = (0, 0, 0).$$

## Következmény

*Ha F skalárpotenciálos, akkor örvénymentes.*

(*SŐT!*)

## Állítás

*A következő tulajdonságok ekvivalensek:*

1. *F skalárpotenciálos egész* $\mathbb{R}^3$*-ban.*
2. $\mathrm{rot}\,(F) = 0$.
3. $\forall\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ *zárt görbére* $\oint_\Gamma F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = 0$. *(Anal2)*

## Kitérő

*Megjegyzés*. Formálisan megmutatjuk, hogy $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(G)) = 0$.

Láttuk, hogy formálisan $\operatorname{div}(G) = \nabla \cdot G$ *skaláris szorzat* és $\operatorname{rot}(G) = \nabla \times G$ *vektoriális szorzat*.

Így $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(G)) = \nabla(\nabla \times G)$ *vegyes szorzat*:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}(G)) = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Miért?}$$

## Következmény.

A fenti két állítás alapján tehát:

1. $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,(f)) = 0$.
2. $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,(F)) = 0$.
3. $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,(f)) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz} = \Delta f$.

## Kitérő: rotáció és vektorpotenciál.

A rotáció *__lineáris__* *operátor*. Ha $\mathrm{rot}\,(G_1) = 0$, *(azaz $G_1$ skalárpotenciálos)*, akkor

$$\forall G : \quad \mathrm{rot}\,(G + G_1) = \mathrm{rot}\,(G) + 0 = \mathrm{rot}\,(G)$$

Ezért a *vektorpotenciál nem egyértelmű*:

ha $F = \mathrm{rot}\,(G)$, akkor $F$-nek $G$ és $G + G_1$ is vektorpotenciálja.

# Skalármező vonalintegrálja $\mathbb{R}^2$-ben vagy $\mathbb{R}^3$-ban.

*(Ismétlés.)* $C \subset \mathbb{R}^3$ SIMA GÖRBE, ha $C = \{\gamma(t)\ :\ t \in [a, b]\}$, ahol $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ *lehetséges paraméterezés.*

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos fv. VONALINTEGRÁLJA A $C$ GÖRBE MENTÉN:

$$\int_C f(x, y, z)\, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\dot{\gamma}(t)|\, \mathrm{d}t.$$

itt $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ a görbe érintővektora.

Lehetséges fizikai interpretáció a *tömeg*.

## Állítás

*A fenti érték független a görbe paraméterezésétől.*

# Vektormező vonalintegrálja *(Ismétlés.)*

Az $F$ VEKTORMEZŐ VONALINTEGRÁLJA a $C$ görbe mentén:

$$\int_C F(\underline{r})\, \mathrm{d}\underline{r} = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \, \mathrm{d}t.$$

Fizikai interpretáció: a görbe mentén haladva végzett MUNKA.

## Állítás

*$F$ skalárpotenciálos* $\Longleftrightarrow$

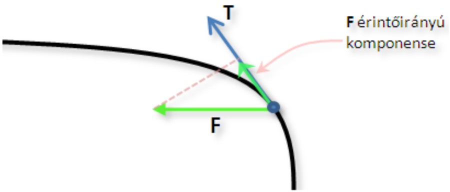
$$\int_C F(x,y,z)\, \mathrm{d}s = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \qquad F = \mathrm{grad}\, f,$$

*az integrál csak $C$ végpontjaitól függ.*

Vektormező vonalintegrálja másképp:

$$\int_C F(\underline{r})\,\mathrm{d}\underline{r} = \int_a^b \Big\langle F(x,y,z), T(x,y,z) \Big\rangle\,\mathrm{d}s.$$

$T(x,y,z)$ a görbe pontjaiban egységnyi érintővektor.

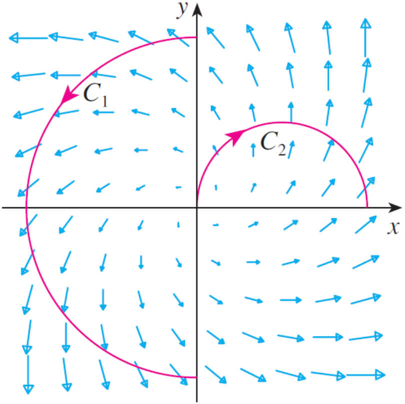


Az $\int\limits_C F(\underline{r})\, \mathrm{d}\underline{r}$ vonalintegrál *formálisan* ($\mathbf{R}^2$-ben):

$$\begin{aligned}
\int\limits_C F(x,y)\, d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \int\limits_C \begin{pmatrix} f(x,y) & g(x,y) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \\
&= \int\limits_C f(x,y)dx + \int\limits_C g(x,y)dy =
\end{aligned}$$

$$= \int_a^b f(\gamma(t))\, \dot{x}(t)\, dt + \int_a^b g(\gamma(t))\, \dot{y}(t)\, dt$$

# Példa

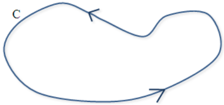



Vajon milyen előjelű a vektormező vonalintegrálja $C_1$ és $C_2$ mentén?

## Definíció

*Az $F$ vektormező* CIRKULÁCIÓJA *a $C$ **zárt** görbe mentén:*

$$\oint_C F(\underline{r})\, \mathrm{d}\underline{r}$$




## Következmény

*Ha $F$ potenciálos vektormező, akkor cirkulációja mindig 0.*

$C = \{\gamma(t) : t \in [a,b]\}$ $\mathbb{R}^n$*-beli görbe*, $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

## Definíció

*Az f* $\mathbb{R}^n$*-beli skalármező* VONALINTEGRÁLJA *C mentén:*

$$\int_C f(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\dot\gamma(t)|\, \mathrm{d}t,$$

*Megjegyzés.* $\dot\gamma(t) = (\dot x_1(t), \ldots, \dot x_n(t))$ a görbe érintővektora.

## Állítás

*A vonalintegrál értéke független a görbe paraméterezésétől.*

# Felület

Eddig: "*kétváltozós függvény felülete*".

*Kb. definíció*: $S \subset \mathbb{R}^3$ felület, ha $\exists D \subset \mathbb{R}^2$ aminek képe.

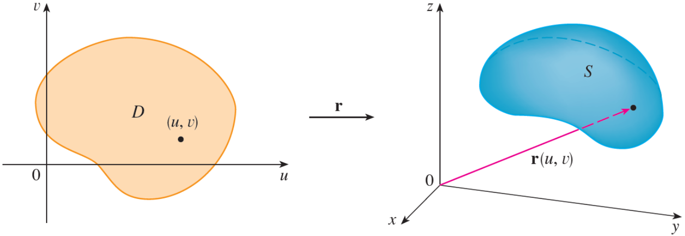
**Definíció.** Adott $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány, (pl. $D = [a,b] \times [c,d]$)

és $s : D \to \mathbb{R}^3$ függvény: $s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

A FELÜLET $S = \Big\{ \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \ : \ (u,v) \in D \Big\}$.

SIMA FELÜLETről beszélünk, ha $s(u,v)$ differenciálható.

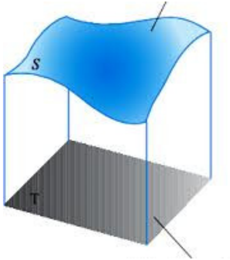
*Megjegyzés.* $S \subset \mathbb{R}^3$ pontjait $D \subset \mathbb{R}^2$ elemeivel paraméterezzük.




Mi az analógia a görbe definícóval?

1. *Példa.* *A kétváltozós függvény felülete.* $D \subset \mathbb{R}^2$, $t : D \to \mathbb{R}$.

$$S := \{(x, y, t(x, y)) \; : \; (x, y) \in D\}.$$




2. *Példa.* Az *egységgömb felszine*.

Paraméterezhető a *második* és *harmadik* gömbi polárkoordinátával.

$$s(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} x(u, v) &= \sin(u)\cos(v), \\ y(u, v) &= \sin(u)\sin(v), \\ z(u, v) &= \cos(u) \end{aligned} \qquad (u, v) \in D = ?$$

## Skalármező felületi integrálja

$S \subset \mathbb{R}^3$ sima felület, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $S \subset D_f$.

Definíció. $f$ FELÜLETI INTEGRÁLJA az $S$ felület mentén:

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(s(u, v)) \cdot |s'_u \times s'_v|\,\mathrm{d}(u, v).$$

*Megjegyzés.* Az $S$ felület érintősíkjának irányvektorai: $\dfrac{\partial s}{\partial u}$ és $\dfrac{\partial s}{\partial v}$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v} \perp$ felület.

Formálisan: $\mathrm{d}S = \left( \dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v} \textit{normálvektor hossza} \right) \mathrm{d}(u, v)$

*Megjegyzés.* $s'_u \times s'_v$ a felület érintősíkjának normálvektora.

Ha az $S$ felület zárt, akkor így jelöljük:

$$\oiint_S f(x, y, z) \, \mathrm{d}S.$$

Állítás. A felületi integrál értéke független a felület paraméterezésétől.

*Ha nem így lenne, másképp kellene definiálni.*

*Példa.* A felületet $t : D \to \mathbb{R}$ diff-ható függvény adja meg:

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ t(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Ekkor

$$s'_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t_u(u,v) \end{pmatrix}, \qquad s'_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t_v(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad s'_u \times s'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & t'_u \\ 0 & 1 & t'_v \end{vmatrix} = (-t'_u, -t'_v, 1).$$ Honnan ismerős?

Ism. $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(s(u,v)) \cdot |s'_u \times s'_v|\,\mathrm{d}(u,v).$

Belátjuk, hogy

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D f(u,v,t(u,v))\sqrt{1+(t'_u)^2+(t'_v)^2}\,\mathrm{d}(u,v).$$

A fenti $s(u,v)$ parciális deriváltjai

$$s'_u = (0,\ 1,\ \ t'_u), \qquad s'_v = (0,\ 1,\ t'_v).$$

és ezek a vektoriáliis szorzatának hossza $\sqrt{1+(t'_u)^2+(t'_v)^2}$.

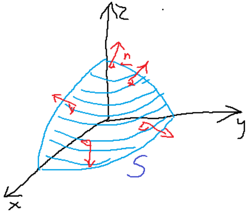
$f(x,y,z)=1$ esetén mit ad a képlet? Miért?

# Fluxus. Vektormező felületi integrálja.

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diffható vektormező,

$S \subset \mathbb{R}^3$ felület.

$\underline{n}(x, y, z)$, $\|\underline{n}\| = 1$ *normálvektor*.




**Defniníció** Az $F$ FLUXUSA az $S$ felületre:

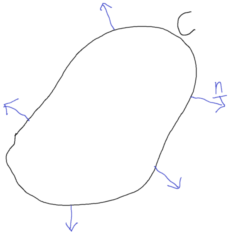
$$\iint_S F \, \mathrm{d}\underline{S} = \iint_S F \cdot \underline{n} \, \mathrm{d}S. \qquad \text{( \textit{jobb oldalon skalármező})}$$

*Megjegyzés.* *Zárt felület* esetén a felületi integrál: $\displaystyle\oiint_S F \, \mathrm{d}\underline{S}$.

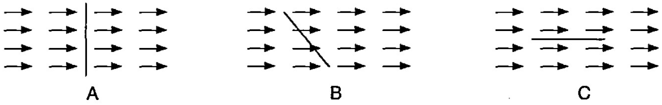
Analógia. *2-dim-ban* $F(x, y)$ VEKTORMEZŐ FLUXUSA a $C$ síkgörbére:

$$\int_C F(x, y) \cdot \underline{n}(x, y)\, \mathrm{d}s,$$

$\underline{n}(x, y)$ egységnyi **normálvektorok**.




*Intuitív:* mennyire ”nyomul át” a vektormező.



*1. Példa.* $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

$S$ az origó középpontú, $r$ sugarú gömb felszíne.

Mennyi $F$ fluxusa $S$-re nézve? RAJZ

**Megoldás.** Egységnyi normálvektor: $\underline{n} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. RAJZ!

$$F \cdot \underline{n} = \frac{1}{r}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{r} \cdot r^2.$$

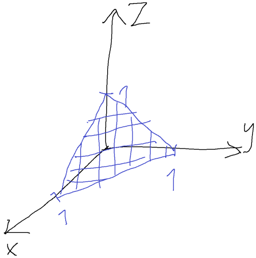
Ezért a fluxus:

$$\iint_S \underbrace{F \,\mathrm{d}\underline{S}}_{\text{konstans}} = r \cdot S \text{ (felülete)} = r \cdot (4\pi r^2).$$

*2. Példa.* $F(x, y, z) = (1, 0, 0)$, konstans,

$S$ az $x + y + z = 1$ síknak az a része,
ami az *első tér-nyolcadba esik.*

RAJZ?




*Mennyi F fluxusa S-re nézve?*

$\underline{n}(x, y, z) = ? \quad \Longrightarrow \qquad \mathit{fluxus} = \frac{1}{2}$

# Vektormező felületi integrálja.

A vektormező felületi integrál definícó: *skalárszorzattal*

$\longrightarrow$ visszavezettük egy skalármező integráljára.

A felület egységnyi normálvektorai $\underline{n}$. Így

$$\underline{\iint_S F \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S} =$$

$$= \iint_D F(s(u,v)) \cdot \frac{s'_u \times s'_v}{|s'_u \times s'_v|} \cdot |s'_u \times s'_v| \, \mathrm{d}(u,v) =$$

$$= \iint_D F(s(u,v)) \cdot (s'_u \times s'_v)\, \mathrm{d}(u,v) = \underline{\iint_S F\, \mathrm{d}\mathbf{S}}.$$