Matematikai Analízis III.

1. előadás

2020. szeptember 7.

Témakörök

1. Vektoranalízis
   - Vektormező, skalár- és vektorpotenciál.
   - Cirkuláció, fluxus
   - Klasszikus integrál-átalakító tételek
2. Differenciálgeometria
3. Variációszámítás
4. Parciális differenciálegyenletek

Vektormező

Az F függvény "$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú": VEKTORMEZŐ.

(*többváltozós és vektorértékű*)

Koordinátafüggvényei:

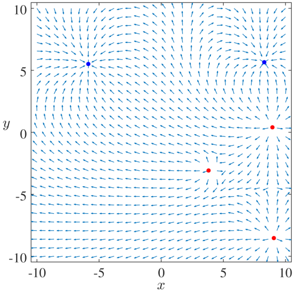
$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

ahol $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \text{ vagy } F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Geometriai kép: a tér ill. sík pontjaihoz egy vektort rendel

Fizikai kép: pl. a tér egyes pontjaiban ható erő.



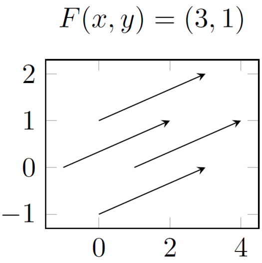
Pontszerű elektromos töltések által generált vektormező

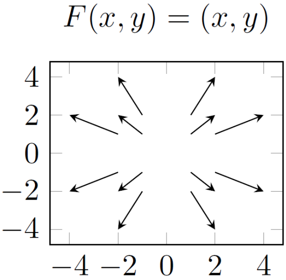
A többváltozós **valós** függvényeket SKALÁRMEZŐNEK nevezzük: a tér minden pontjához egy skalárt rendelnek.

Konvenció szerint a *skalármezőket* kisbetűvel $f, g, h, \ldots$ a *vektormezőket* nagybetűvel F, G, H jelöljük.

Példák, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

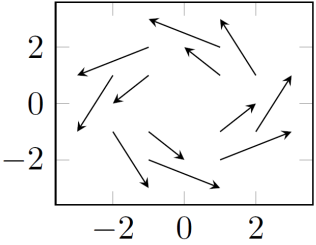
1. $F(x, y) = (3, 1)$: konstans mező
2. $F(x, y) = (x, y)$: az origóból ,,kifelé mutató” vektorok





3. „forgatás”

$$F(x, y) = (-y, x)$$



Folytonosság, differenciálhatóság

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ FOLYTONOS, ha $\forall f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos.

F DIFFERENCIÁLHATÓ az $\underline{x} \in D_F$ pontban, ha $\exists \underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\boxed{F(\underline{x} + \underline{\Delta x}) = F(\underline{x}) + \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\Delta x} + \mathrm{o}(\|\underline{\Delta x}\|),}$$

$$\lim_{\underline{\Delta x} \to \underline{0}} \frac{\left\|F(\underline{x} + \underline{\Delta x}) - F(\underline{x}) - \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\Delta x}\right\|}{\|\underline{\Delta x}\|} = 0.$$

A vektormező DERIVÁLT MÁTRIXA az adott pontban a fenti $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Jelölés: $\mathrm{D}\, F(x) = \underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Ez a JACOBI-MÁTRIX az adott pontban.

Igazoljuk a fenti definíció alapján, hogy $\mathrm{D}\, F(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(x) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(x) \end{pmatrix}.$

Differenciálási szabályok

1. *Homogén lineáris*: Ha $F, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff-hatók, és $c \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{D}\,(F+G) = \mathrm{D}\,F + \mathrm{D}\,G \qquad \text{és} \qquad \mathrm{D}\,(cF) = c \cdot \mathrm{D}\,F.$$

2. *Kompozíció differenciálása*:

$$\mathrm{D}\,(G \circ F)(a) = \mathrm{D}\,G(F(a)) \cdot \mathrm{D}\,F(a).$$

Milyen szorzások vannak itt?

3. *Inverz derivált*: Tfh F diff-ható a-ban, és $\mathrm{D}\,F(a)$ nem szinguláris. Ekkor $\exists F^{-1}$, diff-ható $F(a)$-ban, és

$$\mathrm{D}\,F^{-1}(F(a)) = (\mathrm{D}\,F(a))^{-1}$$

Ismerős?

$\mathbb{R}^3$-beli *skalármező* derivált

Definíció.

∇ (NABLA) $:= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ egy *operátor*. (formális vektor)

$$\nabla \ : \ \textit{skalármező} \mapsto \textit{vektormező}$$

Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, akkor

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \text{grad } f.$$

$\mathbb{R}^3$-beli *vektormező* derivált

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenciálható vektormező. Ennek deriváltja:

$$\mathrm{D}\,F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Túl sok adat....

A 9 parciális derivált helyett:

– *divergencia* (egyetlen szám)

– és *rotáció* (egy vektor).

$$\mathrm{D}\,F = \begin{pmatrix} f'_{1,x} & f'_{1,y} & f'_{1,z} \\ f'_{2,x} & f'_{2,y} & f'_{2,z} \\ f'_{3,x} & f'_{3,y} & f'_{3,z} \end{pmatrix}$$ *Túl sok adat....*

Definíció. A vektormező DIVERGENCIÁJA:

$$\operatorname{div}(F) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \langle \nabla, F \rangle .$$

A DIVERGENCIA egy *szám*, a vektormező "*szétszóródását*" méri.

0. *Példa.* $F(x, y, z) = (3, 1, 0)$: konstans mező.

$$\operatorname{div} F = 0 + 0 + 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{nem szóródik szét.}$$

1. *Példa.* $F(x, y, z) = (x, y, z)$. $\mathrm{div}\,(F) = 3, \implies$ egyenletesen szétterül. Rajzban?
2. *Példa.* $G(x, y.z) = (x, y^2, 0)$

$$\mathrm{div}\,(G) = 1 + 2y^2 \implies \text{ a szétszóródás helytől függ.}$$

3. *Példa.* $H(x, y, z) = (-y, x, 0)$: ,,forgatás"

$$\mathrm{div}\,(H) = 0 \implies \text{ nem szóródik.}$$

Mennyiben más, mint az előző, konstans mező?

Ha $\mathrm{div}\,(F) \equiv 0$, akkor a vektormező DIVERGENCIA-MENTES.

Megjegyzés. A divergencia értéke negatív is lehet! Ki tud erre példát?

Definíció Az F vektormező ROTÁCIÓJA

$$\operatorname{rot}(F) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla \times F = \left(\cdots, \cdots, \cdots \right)$$

Pl. első koordináta?

ROTÁCIÓVEKTOR: csavarodás / örvénylés

$\longrightarrow$ Sebességének nagysága, ill. arra merőleges irány.

Jelölés: $\operatorname{rot}(F) = (0,0,0)$ helyett $\operatorname{rot}(F) = 0$.

Ha $\operatorname{rot}(F) = 0$, akkor a vektormező **örvénymentes**.

1. *Példa.* $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

$$\mathrm{rot}\,(F) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$\Longrightarrow$ nincs örvénylés.

3. *Példa.* $H(x, y, z) = (-y, x, 0)$: „forgatás”

$$\mathrm{rot}\,(H) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

Örvény. *Nagysága*: $|\mathrm{rot}\,(H)| = 2$. *Iránya* $\perp \mathrm{rot}\,(H)$.

Szemléletesen?

Szorzat-deriválási szabályok

1. f és g skalármezők: $\operatorname{grad}(fg) = f \cdot \operatorname{grad}(g) + g \cdot \operatorname{grad}(f)$.
2. $\underbrace{f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}_{f \cdot F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3}$

$$\operatorname{div}(fF) = f \cdot \operatorname{div}(F) + \langle F, \operatorname{grad} f \rangle$$

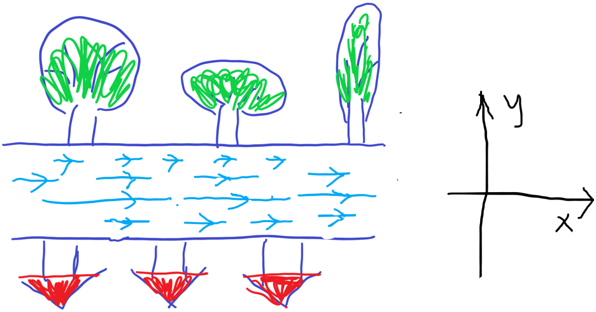
$$\operatorname{rot}(fF) = (\operatorname{grad} f) \times F + f \cdot \operatorname{rot}(F)$$

3. $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Longrightarrow F \times G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div}(F \times G) = \langle G, \operatorname{rot}(F) \rangle - \langle F, \operatorname{rot}(G) \rangle$$

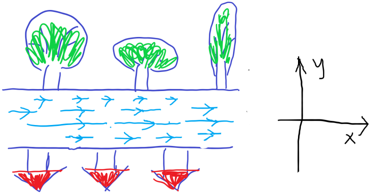
Igazoljuk!

Példa: Jellemezzük egy folyó áramlását vektormezővel.



x tengely: a folyás irányába mutat, a folyó közepén van.

y tengely: a folyás irányára merőleges.



A folyó szélessége $2d$.

$$y \in [-d, d]$$

A z tengely felfelé mutat.

A folyó sebessége $\underline{v} = \left(v_0 \cdot (1 - \frac{y^2}{d^2}), 0, 0 \right)$

Az áramlás *örvényessége*?

<u>Megoldás:</u> $\mathrm{rot}\,(\underline{v}) = \left(0, 0, \frac{2yv_0}{d^2} \right)$ ellenőrzés, most!

Vajon mi lehet a fizikai háttér?

Adott $F = (f_1, f_2, f_3)$. Vajon $\exists G = (g_1, g_2, g_3)$: $F = \mathrm{rot}\, G$? Ha **igen**:

$$\mathrm{rot}\,(G) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} \implies \begin{aligned} f_1 &= \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ f_2 &= \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x} \\ f_3 &= \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ekkor $\mathrm{div}\,(F) = \frac{\partial}{\partial x} f_1 + \frac{\partial}{\partial y} f_2 + \frac{\partial}{\partial z} f_3 =$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right) = 0.$$

Adott F-hez vajon $\exists G$, melyre $F = \operatorname{rot} G$?

Definíció. $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ VEKTORPOTENCIÁLOS, ha $\exists G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, amelyre $\operatorname{rot}(G) = F$.

Következmény. Ha $F = \operatorname{rot} G$, akkor $\underbrace{\operatorname{div}(F) = 0}_{\text{szükséges feltétel}}$.

Állítás. Ha $\underbrace{\operatorname{div}(F) = 0}_{\text{elégséges felt.}}$, akkor $\exists G$. melyre $F = \operatorname{rot} G$.

Állítás. *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *F vektorpotenciálos.*
2. $\operatorname{div}(F) = 0$.