Matematikai Analízis III.

12. előadás. PDE 3. rész

2020. december 7.

Másodrendű PDE 2. rész
Hővezetés egyenlete

Hővezetés. Ismétlés.

$u(x,t) = ?$ Mennyi a hőmérséklet x helyen, t időben?

Fizikai meggondolás $\Longrightarrow$ $u'_t = u''_{xx}$.

1. eset. $x \in \mathbb{R}$ (végtelen rúd), $t \geq 0$.

+ kezdeti feltétel $u(x,0) = f(x)$. (ahol $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$.)

A feladat megoldása:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy.$$

$u(x,t) \approx \mathcal{N}(x, \sqrt{2t})$

ÁLtalános hővezetés

Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt tartomány, $\Omega_t^+ = \Omega \times (0, \infty)$.

$u : \Omega_t^+ \to \mathbb{R}$ MEGOLDÁSA A HŐVEZETÉSI FELADATNAK, ha

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(x,t),$$

$x = (x_1, x_2, \ldots x_n) \in \Omega$ és $t > 0$ .Rövid jelöléssel $u'_t = \sum_{k=1}^{n} u''_{x_k x_k}$.

A feladathoz tartozó KEZDETI FELTÉTEL, ill. PEREMFELTÉTEL:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \qquad x \in \Omega. \qquad &(IC) \\ u(x,t) &= u_0(x,t), \qquad x \in \partial\Omega. \qquad &(BC) \end{aligned}$$

Hővezetés véges rúdban

2. eset. $x \in [0, 1]$, $t \geq 0$. Ekkor az egyenlet:

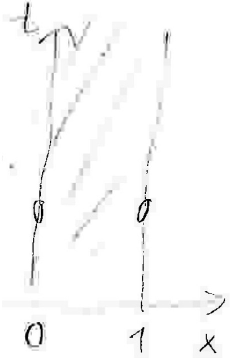
$$u'_t = u''_{xx}, \quad x \in (0, 1), \; t > 0.$$

A kezdeti feltétel:

$$u(x, 0) = f(x). \quad x \in (0, 1),$$

és peremfeltétel:

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$



$u'_t = u''_{xx}. \quad x \in (0,1)$

Megoldás: változók szétválasztásával. $u(x,t) = X(x)T(t) =?$

Az egyenlet:

$$T'(t)X(x) = X''(x)T(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

$$(1) \quad T'(t) = \lambda T(t) \qquad \text{és} \qquad (2) \quad X''(x) = \lambda X(x).$$

(1) általános megoldása $T(t) = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}$.

A peremfeltételeket behelyettesítve: $\forall t > 0$-ra

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(1)T(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad X(1) = X(0) = 0.$$

Emiatt (2)-ben $\lambda = -\alpha^2$, és $X''(x) = -\alpha^2 X(x)$ megoldása

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$.. Peremfeltétel: $X(1) = X(0) = 0$

Így $X(0) = A = 0$, $X(1) = B\sin(\alpha) = 0$. $\implies$ $\alpha = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

Az eredeti PDE $\lambda = -n^2\pi^2$-hez tartozó alapmegoldása:

$$u_n(x,t) = Ae^{-n^2\pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x).$$

Állítás. A PDE megoldása:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x),$$

ahol $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x)$.

Megj. $t \to \infty$ esetén igazoljuk, hogy a rúd hőmérséklete $\to 0$.

Hővezetés „visszafelé”

A 0. időpillanatban a rúd hőmérsékletéte $u(x,0) = f(x)$.

Előtte? Honnan indult? Mit várunk?

$\simeq$ idő megfordítás: $t \to -t$. $U(x,t) := u(x,-t)$. Ekkor:

$$U_t'(x,t) = -U_{xx}''(x,t).$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{+n^2\pi^2 t} \cdot \sin(n\pi x).$$

Ekkor $\lim\limits_{t\to\infty} U(x,t) = \infty$

A megoldás „felrobban”. A rúd kezdetben végtelenül forró volt!

Példa .

$u : [0,1] \times [0,\infty] \to \mathbb{R}$ megoldása az alábbi feladatnak:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= u''_{xx}(x,t), \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le 1 \\ u'_x(0,t) &= u'_x(1,t) = 0, \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

Neumann típusú BC. A rúd *hőmennyisége* a t időpontban:

$$\mathcal{T}(t) := \int_0^1 u(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

$$\mathcal{T}'(t) = \int_0^1 \underbrace{u'_t(x,t)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u''_{xx}(x,t)\,\mathrm{d}x = u'_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Ezért $\mathcal{T}(t)$ konstans: $\mathcal{T}(t) = \mathcal{T}(0) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =: \mathcal{T}$.

Azt "várjuk", hogy a rúd hőmérséklete *homogén* lesz. $\surd$ **HF**

Másodrendű PDE 3. rész
Hullámegyenlet.

Hullámmozgás végtelen húrban

Végtelen hosszú rugalmas húr: $u(x,t)$ a kitérés, $t \geq 0$ és $x \in \mathbb{R}$

Hullámmozgás $\implies$ $u(x,t)$ kielégíti a *hiperbolikus PDE*-t

$$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

ahol c fizikai konstans. + Kezdeti feltételek (2 kell! miért?)

$$u(x,0) = f(x), \qquad u'_t(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

ahol f és g adott függvények.

$u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$. D'Alambert-féle megoldás.

Koordináta transzformáció:

$$\left.\begin{aligned} \xi &:= x+ct, \\ \eta &:= x-ct \end{aligned}\right\} \equiv \left\{\begin{aligned} x &= \frac{\xi+\eta}{2}, \\ t &= \frac{\xi-\eta}{2c} \end{aligned}\right.$$

Ezt behelyettesítve:

$$U(\xi,\eta) := u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2c}\right)$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad U'_\xi &= \frac{1}{2}u'_x + \frac{1}{2c}u'_t, \\ \Longrightarrow \quad U''_{\xi\eta} &= u''_{xx}\frac{1}{4} + u''_{tt}\frac{1}{2c}\cdot\frac{-1}{2c} + u''_{xt}\frac{1}{2c}\cdot\frac{-1}{2} + u''_{tx}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2c} = \\ &= \frac{1}{4}\left(u''_{tt}\frac{-1}{c^2} + u''_{xx}\right) = 0. \end{aligned}$$

$U''_{\xi\eta} = 0$.

$\Longrightarrow \quad U'_\xi(\xi,\eta)$ független η-tól, ezért $U'_\xi(\xi,\eta) = F_0(\xi)$.

$$\Longrightarrow \quad U(\xi,\eta) = \int U'_\xi d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta).$$

Tétel. A hullámegyenlet PDE általános megoldása

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

bármely F és G kétszer folyt. diff-ható valós függvényre.

Megjegyzés. Ezek megoldások, persze. *Pl.* $u(x,t) = \varphi(x+ct)$.

Ekkor $u''_{tt} = \dots$ és $u''_{xx} = \dots$

Kezdeti feltételek: $u(x,0) = f(x), \quad u'_t(x,0) = g(x)$

A megoldást összeg alakban fogjuk keresni:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t),$$

mégpedig $v''_{tt} = c^2 v''_{xx}$ és $w''_{tt} = c^2 w''_{xx}$, továbbá:

$$v(x,0) = f(x), \qquad v'_t(x,0) = 0,$$
$$w(x,0) = 0, \qquad w'_t(x,0) = g(x).$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$v(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2}, \quad \text{check!}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(s)ds - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(s)ds. \quad \text{check!}$$

Összefoglalás

Állítás.

Az $u''_{tt} = c^2 u''_{xx}$ hullámegyenlet megoldása a $u(x,0) = f(x)$ és $u'_t(x,0) = g(x)$ feltételek mellett egyértelmű:

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Formális magyarázat

A hullámmozgás PDE $L[u] = 0$, ahol L a differenciál-operátor:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Formálisan szorzattá bontható:

$$L = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$L[u] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \ \text{vagy} \ \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

A jobboldalon: *transzport egyenletek* vannak!

Ezek megoldásai: $F(x + ct)$ és $G(x - ct)$ alakúak.

Gyenge megoldás.

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

Esetleg $f(x)$ és / vagy $g(x)$ nem differenciálhatók?

Definíció. Ekkor $u(x,t)$ GYENGE MEGOLDÁS, nem differenciálható.

Vajon a kezdeti ”töréspontok” időben kisimulnak-e vagy sokszorozódnak.

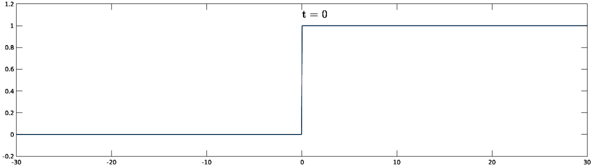
A hullámegyenlet homogén lineáris $\Longrightarrow$ külön vizsgálhatjuk a *kezdeti állapot* és a *kezdeti sebesség* hatását.

Néhány tanulságos példa. $u''_{tt} = u''_{xx}$

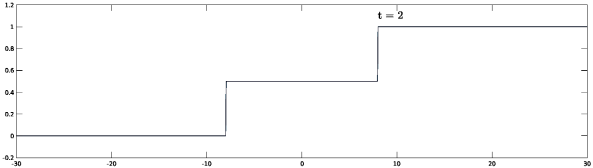
1. *Példa.* A kezdeti a kitérés és pillanatnyi sebesség:

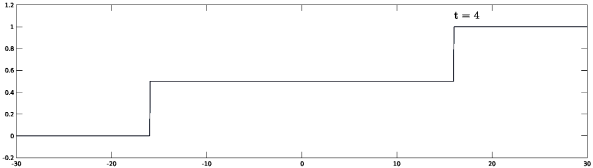
$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geq 0, \end{cases} \qquad u'_t(x,0) \equiv 0.$$

Tehát ebből a kiinduló állapotból kezdünk:



A húr állapota két későbbi időpontban:





$$u(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} g(s)ds.$$

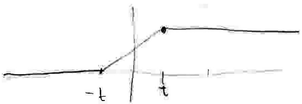
2. *Példa.* A kezdeti a kitérés és pillanatnyi sebesség:

$$u(x,0) = f(x) \equiv 0 \qquad u'_t(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x < 0, \\ 1 & \text{ha} \quad x \geq 0, \end{cases} .$$

A megoldás:

$$u(x,t) = \frac{0}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \chi_{[0,\infty)} ds.$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x+t < 0, \\ x+t & \text{ha} \quad x-t < 0 < x+t, \\ 2t & \text{ha} \quad 0 < x-t, \end{cases}$$



$$u(x,t) = \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds.$$

HF. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a húr, ha

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{ha} \quad x \in [-1,0], \\ -x+1 & \text{ha} \quad x \in (0,1], \\ 0 & \text{ha} \quad x \notin [-1,1], \end{cases}$$

$$u_t'(x,0) = g(x) \equiv 0.$$

Másodrendű PDE 4. rész

Kitekintés az IH esetre.

IH hővezetés, véges rúdban.

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) - u''_{xx}(x,t) &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Az IH egyenletet ketté bontjuk, szuperpozíció elv alapján.

$$\begin{aligned} v'_t - v''_{xx} &= 0, \\ v(x,0) &= g(x) \\ v(0,t) &= v(1,t) = 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w'_t - w''_{xx} &= f(x,t) \\ w(x,0) &= 0. \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Ekkor az eredeti egyenlet megoldása $u = v + w$.

INHOMOGÉN hővezetés PDE, 0 peremfeltétellel

Azt a $w : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvényt keressük, melyre:

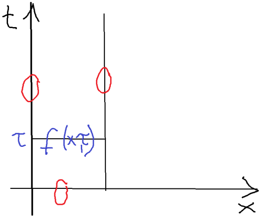
$$\begin{aligned} w'_t(x,t) - w''_{xx}(x,t) &= f(x,t) \\ w(x,0) &= 0, \\ w(0,t) &= w(1,t) = 0 \end{aligned}$$

Duhamel's elv: sok-sok homogén PDE

$\tau > 0$ időpontban indítva: $\tilde{w}(x,t;\tau)$, $t \geq \tau$

$$\begin{aligned} \tilde{w}'_t(x,t;\tau) - \tilde{w}''_{xx}(x,t;\tau) &= 0 \\ \tilde{w}(x,\tau;\tau) &= f(x,\tau), \\ \tilde{w}(0,t;\tau) = \tilde{w}(1,t;\tau) &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_t'(x,t;\tau) - \tilde{w}_{xx}''(x,t;\tau) &= 0 \\
\tilde{w}(x,\tau;\tau) &= f(x,\tau) \\
\tilde{w}(0,t;\tau) = \tilde{w}(1,t;\tau) &= 0
\end{aligned}
$$



Állítás.

$$w(x,t) = \int_0^t \tilde{w}(x,t,\tau)d\tau.$$

Bizonyítás.

$$w_t' = \tilde{w}(x,t,t) + \int_0^t \tilde{w}_t'(x,t,\tau)d\tau, \qquad w_{xx}'' = \int_0^t \tilde{w}_{xx}''(x,t,\tau)d\tau.$$

$$\Longrightarrow \quad w_t' - w_{xx}'' = f(x,t) + \int_0^t \underbrace{(\tilde{w}_t - \tilde{w}_{xx}'')}_{0} d\tau.$$

Másodrendű lineáris PDE-k osztályozása

PDE kanonikus alakja

Kétváltozós, másodrendű PDE mo-a $u(x,t)$:

$$F(t, x, u, u'_t, u'_x, u''_{tt}, u''_{tx}, u''_{xt}, u''_{xx}) = 0,$$

ahol F adott függvény.

Fizikai alkalmazásokban gyakran t az idő, x pedig a hely.

Tfh F lineáris, ekkor a PDE ilyen alakú

$$a_{11}u''_{tt} + a_{12}u''_{tx} + a_{21}u''_{xt} + a_{22}u''_{xx} + b_1 u'_t + b_2 u'_x + f(t, x, u) = 0$$

Definíció. A PDE KANONIKUS ALAKÚ, ha $a_{12} = a_{21} = 0$

Tétel.

Homogén, állandó együtthatós lineáris PDE kanonikus alakra hozható megfelelő koordináta transzformációval:

$$\varepsilon_1 u''_{tt} + \varepsilon_2 u''_{xx} + b_1 u'_t + b_2 u'_x + cu = 0,$$

ahol ε_j értéke -1, 1 vagy 0, az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeitől függően lehetnek.

A lineáris PDE-k osztályozása. *1. eset.*

$$\varepsilon_1 u''_{tt} + \varepsilon_2 u''_{xx} + b_1 u'_t + b_2 u'_x + cu = 0$$

A PDE *elliptikus*, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$, azaz

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1.$$

Ekkor a függvény változóit x és y jelöli. Időben nem változó folyamatokat lehet leírni.

Példa a *Laplace egyenlet*:

$$\triangle u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0.$$

Az inhomogén elliptikus egyenlet a *Poisson egyenlet*:

$$\triangle u + f(x, y) = 0.$$

A lineáris PDE-k osztályozása. *2. eset.*

$$\varepsilon_1 u''_{tt} + \varepsilon_2 u''_{xx} + b_1 u'_t + b_2 u'_x + cu = 0$$

A PDE *hiperbolikus* típusú, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$, azaz

$$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1.$$

Ekkor az ismeretlen függvény két változója t (idő) és x (hely).

Hiperbolikus egyenlet pl a hullámmozgás egyenlete: $u''_{tt} = u''_{xx}$.

Megjegyzés. Ha a megoldásban t helyett $-t$-t írunk, újra megoldást kapunk.

Ez azt jelenti, hogy a megoldás-folyamat időben megfordítható.

A lineáris PDE-k osztályozása. *3. eset.*

$$\varepsilon_1 u''_{tt} + \varepsilon_2 u''_{xx} + b_1 u'_t + b_2 u'_x + cu = 0,$$

A PDE *parabolikus* típusú, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$, azaz

$$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 \neq 0 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 \neq 0,\ \varepsilon_2 = 0.$$

Példa erre a hővezetés egyenlete $u'_t = u''_{xx}$.

Megjegyzés. Ha itt egy megoldásba t helyett $-t$-t írva, nem kapunk megoldást.

Ezek a folyamatok időben nem megfordíthatóak.