Matematikai Analízis III.

11. előadás. PDE 2. rész

2020. november 30.

Laplace egyenlet.

Adott $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, sima határú tartományon keresünk egy fv-t.

$u : \Omega \to \mathbb{R}$. A függvény változóit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jelöli.

Ω belsejében a függvény eleget tesz a Laplace egyenletnek:

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{n} u''_{x_k x_k} = 0. \qquad \text{(ahol } u''_{x_k x_k} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u\text{)}$$

Ez az egyik leggyakrabban előforduló PDE.

Definíció. A fenti függvény HARMONIKUS Ω-BAN.

A keresett függvény t-től nem függ, időben állandó állapotok leírására alkalmas (pl. egyensúlyi helyzetek).

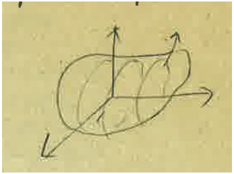
Fizikai interpretáció.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nyílt tartomány. $u(x, y, z)$ vmilyen egyensúlyban levő fizikai jellemző, $(x, y, z) \in \Omega$.

(*kémiai anyag sűrűsége, hőmérséklet, elektromos potenciál*).

Egyensúlyi állapot $\equiv$ $\forall$ zárt felületen keresztül nem változik.

"ki-be" sűrűség összege 0.



A *változás sebessége* minden pontban *u gradiensével* arányos:

$$F(x, y, z) = -a\nabla u(x, y, z)$$

$F(x,y,z) = -a\nabla u(x,y,z)$

Legyen $M \subset \Omega$ tetszőleges, melynek ∂M határa sima. Ekkor

$$\oiint_{\partial M} F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_M \mathrm{div}\, F(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) \quad \text{Miért?}$$

Másrészt

$$\mathrm{div}\, F(x,y,z) = \mathrm{div}\, \mathrm{grad}\, u(x,y,z) = \triangle u,$$

ezért valóban

$$\oiint_{\partial M} F \, \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_M \triangle u(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) = 0.$$

Tehát $\forall M \subset \Omega$ teljesül: $\iiint_M \triangle u = 0$, ezért

$$\triangle u(x,y,z) = 0 \qquad \forall (x,y,z) \in \Omega.$$

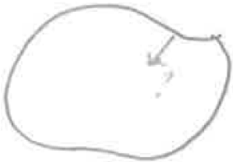
$\Delta u(x) = 0$ ha $x \in \Omega$.

A fenti egyenlettel együtt adott egy *peremfeltétel* is.

Ez azt jelenti, hogy $u(x)$-ről *valami* ismert, ha $x \in \partial\Omega$.

1. *Dirichlet feltétel*. Adott $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0, \qquad x \in \Omega \\ u(x) &= f(x), \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$



Példa: rugalmasság (elasticity).

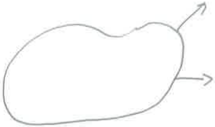
u:*áthelyezés.*

"Displacement" condition = "áthelyezési" feltétel.

További peremfeltételek.

2. *Neumann feltétel*

$$\triangle u = 0, \qquad x \in \Omega$$



$$u'_{\underline{n}}(x) = \langle \text{grad } u, \underline{n} \rangle = f(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \underline{n}} \perp \partial\Omega$ egységnyi hosszú normálvektor.

Rugalmasságtanban $u'_{\underline{n}}$ erő. "Súrlódási feltétel".

3. *Harmadik típusú vagy kevert (mixed) peremfeltétel*

$$\alpha u(x) + \beta u'_{\underline{n}}(x) = f(x), \qquad x \in \partial\Omega, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Megoldás?

A Laplace egyenlet a fenti peremfeltételek bármelyikével *jól kondícionált* feladat, ha a peremfeltételben szereplő függvények elegendően simák.

Nem létezik általános megoldás.

Bizonyos típusú Ω-k esetén tudunk megoldásról beszélni.

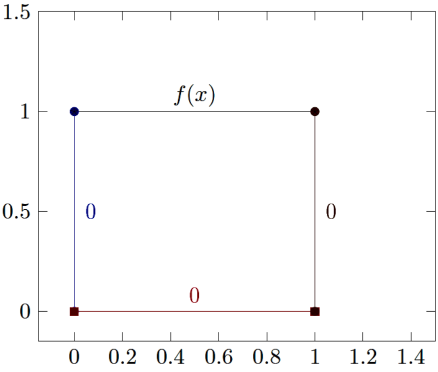
A megoldás *tartománytól* és *peremfeltételtől* függ.

$n = 2$ eset. Megoldás téglalap alakú tartományon.

A függvény változói (x, y). A Laplace egyenlet így írható:

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0.$$

Legyen $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$.



$$u(0, y) = 0$$
$$u(1, y) = 0$$
$$u(x, 0) = 0$$
$$u(x, 1) = f(x)$$

Módszer: Változók szétválasztása.

Keressük a megoldást szeparábilis alakban!

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \quad \Longrightarrow \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Ezt átrendezve:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Az egyenlet két oldala csak akkor egyenlő ha mindkét oldal **konstans**:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} =: \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Két közönséges, egyváltozós differenciálegyenletet kapunk:

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

PDE $\Longrightarrow$ 2 ODE.

$$X''(x) = \lambda X(x), \qquad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

A *peremfeltételekből* az alábbi *kezdeti feltételeket* vezethetjük le:

$$\left.\begin{aligned} \forall y: \quad X(0)Y(y) &= 0 \\ \forall y: \quad X(1)Y(y) &= 0 \\ \forall x: \quad X(x)Y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Y(0) = X(0) = X(1) = 0.$$

Első ODE.

$$X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(1) = 0.$$

1. eset. Tfh $\lambda > 0$, azaz $\lambda = \alpha^2$. Ekkor

$$X'' = \alpha^2 X \quad \Longrightarrow \quad X(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}.$$

A kezdeti feltételek miatt ekkor

$$X(0) = A + B = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = -A.$$

$$X(1) = Ae^{\alpha} + Be^{-\alpha} = 2A \operatorname{sh} \alpha = 0.$$

Ekkor $\alpha = 0$ vagy $A = 0$. Ezért $X \equiv 0$, tehát $\cancel{\lambda > 0}$

$$X'' = \lambda X, \qquad X(0) = X(1) = 0.$$

2. eset $\lambda < 0$, $\lambda = -\alpha^2$

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \implies X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x).$$

A kezdeti feltételekből adódó együtthatók:

$$X(0) = A = 0 \implies A = 0,$$

$$X(1) = B\sin\alpha = 0 \implies \alpha = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy $\lambda = -(k\pi)^2$ a lehetséges paraméter.

$$X_k(x) = \sin(k\pi\, x),\ k \in \mathbb{Z}$$

Második ODE.

Tehát $\lambda = -(k\pi)^2$ lehetséges.

$$Y'' = (k\pi)^2 Y, \qquad Y(0) = 0.$$

Ennek megoldása:

$$Y(y) = Ae^{k\pi y} + Be^{-k\pi y}.$$

A kezdeti feltételből

$$Y(0) = A + B \quad \Longrightarrow \quad B = -A.$$

Ezért

$$Y_k(y) = Ae^{k\pi y} - Ae^{-k\pi y} = 2A\,\mathrm{sh}\,(k\pi\, y).$$

Az eredeti $\triangle u = 0$ egyenlet.

Az alapmegoldások

$$u_k(x,y) = \sin(k\pi x)\mathrm{sh}\,(k\pi y), \qquad k = 1, 2, \dots$$

Az általános megoldás ezek *lineáris kombinációja*:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\mathrm{sh}\,(k\pi y),$$

feltéve, hogy a sor konvergens.

Az utolsó peremfeltétel: $u(x,1) = f(x)$.

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\mathrm{sh}\,(k\pi) = f(x).$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\pi x)\mathrm{sh}\,(k\pi) = f(x)$$

Baloldalon: *egy Fourier sor van*.

Ha $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Fourier sorfejtése

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x), \quad \text{akkor} \;\; b_k = A_k \mathrm{sh}\,(k\pi).$$

A Fourier együtthatók kiszámítását már ismerjük, eszerint:

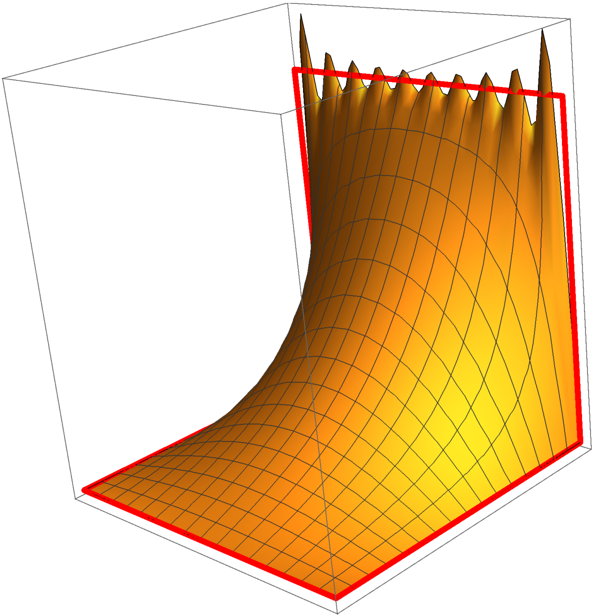
$$b_k = 2\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Következésképpen

$$A_k = \frac{2}{\mathrm{sh}\,(k\pi)}\int_0^1 f(x)\sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x, \quad u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x) Y_k(y).$$

Hova lettek a F. sor *cosinus*-os tagjai?

A megoldás ábrája.



Megoldás téglalapon általános peremfeltétellel.

Legyen most is $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ Peremfeltételek:

$$u(0,y) = f(x)$$
$$u(1,y) = g(x)$$
$$u(x,0) = h(x)$$
$$u(x,1) = j(x)$$

A szuperpozíció elvét használva a megoldás $u = \sum_{1}^{4} u_k$, ahol

$$\begin{array}{lll} u_1(0,y) = f(x) & u_2(0,y) = 0 & u_3(0,y) = 0 \\ u_1(1,y) = 0 & u_2(1,y) = g(x) & u_3(1,y) = 0 \\ u_1(x,0) = 0 & u_2(x,0) = 0 & u_3(x,0) = h(x) \\ u_1(x,1) = 0 & u_2(x,1) = 0 & u_3(x,1) = 0 \qquad \textit{stb.} \end{array}$$

Megoldás körlapon.

$$\Omega = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\}, \quad \partial\Omega = \{x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Legyen W a megoldás *polárkoordinátákban* felírva:

$$W(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

A W függvény parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned}
W'_r &= u'_x \cos(\theta) + u'_y \sin(\theta) && (1)\\
W''_{rr} &= u''_{xx} \cos^2(\theta) + u''_{yy} \sin(\theta) + 2u''_{xy} \cos(\theta)\sin(\theta) && (2)\\
W'_\theta &= u'_x r(-\sin(\theta)) + u'_y r\cos(\theta) && (3)\\
W''_{\theta\theta} &= u''_{xx} r^2 \sin^2(\theta) - u''_{xy} r^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - u'_x r\cos(\theta) + \\
&+ u''_{yy} r^2 \cos^2(\theta) - u''_{yx} r^2 \sin(\theta)\cos(\theta) - u'_y r\sin(\theta). && (4)
\end{aligned}$$

Körlapon

”Könnyen” látható az (1), (2) és (4) összefüggések alapján,

hogy a Laplace egyenlet a **polárkoordinátákban** így írható:

$$w''_{rr} + \frac{w'_r}{r} + \frac{w''_{\theta\theta}}{r^2} = 0.$$

Megoldás. $w''_{rr} + \frac{w'_r}{r} + \frac{w''_{\theta\theta}}{r^2} = 0.$

Változók szétválasztásával keressük a mo-t ilyen alakban:

$$w(r,\theta) = R(r)T(\theta).$$

Ekkor a fenti egyenlet szeparábilis formában felírható:

$$R''T + \frac{R'T}{r} + \frac{RT''}{r^2} = 0.$$

Átrendezzük ezt az egyenletet, a két változót az egyenlet két oldalára visszük:

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{T''}{T} =: \lambda$$

valamilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ mellett

Újra két ODE-t kapunk:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r), \tag{5}$$

$$T''(\theta) = -\lambda T(\theta). \tag{6}$$

A peremfeltételek ekkor:

$$w(a,\theta) = R(a)T(\theta) = g(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \qquad T(0) = T(2\pi),$$

és $T(\theta)$ *periodikus* függvény 2π periodussal.

Állítás. A (6) egyenlet $\lambda < 0$ nem lehet. (**HF**)

Tehát $\lambda = \alpha^2 \quad \Longrightarrow \quad T''(\theta) = -\alpha^2 T(\theta).$

Ennek általános megoldása $T(\theta) = A\cos(\alpha\theta) + B\sin(\alpha\theta),$

Mivel a mo. 2π szerint periodikus, ezért $\alpha = n \in \mathbb{Z}.$

1. egyenlet. $r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r)$

$\lambda = n^2$ helyettesítéssel:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

Az alapmegoldások:

$$R_n(r) = \begin{cases} C_0 + D_0 \ln r, & \text{ha } n = 0, \\ C_n r^n + D_n r^{-n}, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

u a körlapon *differenciálható*, ezért *R korlátos* az origó körül.

Ez nem teljesül az $\ln r$ és az r^{-n} függvényekre.

Emiatt $\forall n$-re $D_n = 0$. Tehát $R_n = C_n r^n$.

A kapott alapmegoldások:

$$w_n(r, \theta) = r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta) \right).$$

$$w_n(r,\theta) = r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

Az általános megoldás:

$$w(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right).$$

Használjuk fel a $w(a,\theta) = g(\theta)$ peremfeltételt:

$$w(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right) = g(\theta).$$

Legyen g Fourier-sorfejtése:

$$g(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos(n\theta) + \beta_n\sin(n\theta)),$$

ahol $\alpha_n =$ ... és $\beta_n =$ .... Ekkor

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \qquad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \qquad B_n = \frac{\beta_n}{a^n}.$$

Példa. Harmonikus függvény az egységkörben?

$\Delta u = 0$ egységkörben $\left(x^2 + y^2 < 1 \right)$

$u(x, y) = y^2$ ha $x^2 + y^2 = 1$

$u(r\cos\theta, r\sin\theta) = w(r, \theta)$

$y = r\sin\theta$
$x = r\cos\theta$

$r^2 w''_{rr} + r w'_r + w''_{\theta\theta} = 0$

Perem feltétel

$w(1, \theta) = 1^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$

$$w(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right).$$

$$w(1,\theta) = 1^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$A_0 = \frac{1}{2} \qquad A_2 = -\frac{1}{2}$$

$$w(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - r^2 \cos(2\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta\right)\right)$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2 + y^2\right)$$

Harmonikus függvények néhány tulajdonsága

Az egységkörben harmonikus függvényt a így számolhatjuk:

$$w(r,\theta) = \alpha_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)\right),$$

ahol α_k és β_k a petemfeltétel $g(\theta)$ FS együtthatói.

Speciálisan, $w(0,\theta) = \alpha_0/2$, ezért

$$u(0,0) = \frac{\alpha_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\oint_{B_1} u(x,y)\, ds,$$

ahol B_1 az origó középpontú egységkörvonal.

$u(0,0)$ a körvonalon felvett függvényértékek átlaga.

Ez általában is igaz.

Tétel.

Tfh u harmonikus Ω belsejében, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *összefüggő* tartomány.

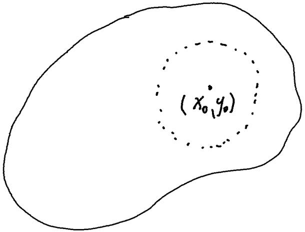
Tfh $(x_0, y_0) \in \Omega$, melynek r sugarú környezete része Ω-nak

(határával együtt).

Ekkor

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{B_r} u(x, y)\, ds,$$

ahol $B_r = B_r(x_0, y_0)$.



$\triangle u = 0$ megoldása **általános** tartományon.

Eddig: Ω *téglalap* vagy *kör* alakú tartomány.

A *megoldás*: peremen adott függvény Fourier sorfejtéséből $\surd$

Tétel. (Ált. eset) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartomány, határa sima:

$$\partial\Omega = \{\gamma(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}, \quad I \subset \mathbb{R} \quad \text{intervallum.}$$

Ekkor $\exists G(x, y, t) : \Omega \times I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy a

$$\triangle u(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega, \qquad u(x, y) = f(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

feladat megoldása így írható:

$$u(x, y) = \int_I G(x, y, t)\, f(\gamma(t))\, \mathrm{d}t.$$

A G függvény *minden tartományra egyedi*.

Példa. Megoldás félsíkon. **Kimaradt.**

Ha például

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

akkor az $u(x, 0) = g(x)$ feltétel melletti megoldás:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} \,\mathrm{d}\xi.$$

HF. Lássuk be, hogy

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = g(x)$$

Másodrendű PDE 2. rész
Hővezetés egyenlete

<u>Időben változó</u> fizikai rendszer leírása.

Idő: $t \geq 0$. Hely: x. $u(x,t)$: hőmérséklet.

1. eset. Végtelen rúd: $x \in \mathbb{R}$.

Adott $u(x,0) = f(x)$ a kiindulási hőmérséklet. Hogyan változik?

Feltétel: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$. Mit jelenthet?

Fizikai megfontolás $\quad \Longrightarrow \quad u'_t = u''_{xx}$.

Ez a HŐVEZETÉS EGYENLETE (HEAT eq.) a legegyszerűbb esetben.

Megoldás vázlat

Azonnal látható, hogy $\forall s \in \mathbb{R}$ esetén megoldás :

$$u_s(x,t) = e^{ixs - s^2 t}, \quad s \text{ paraméter} \qquad \textit{check}!$$

Általános megoldás ezek "lineáris kombinációja":

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ixs - s^2 t} ds, \quad \text{feltéve, hogy konvergens.}$$

Ez a fv a kezdeti időpontban:

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{ixs} ds \ (= f(x)). \quad \text{Ismerős?}$$

Mivel f abszolút integrálható függvény, ezért:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \widehat{f}(s) ds,$$

ahol $\widehat{f}$ a függvény FT-ja.

$u_t'(x,t) = u_{xx}''(x,t), \quad u(x,0) = f(x).$

Állítás. A fenti peremérték feladat megoldása

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs - s^2 t} \widehat{f}(s) ds.$$

A megoldás $f(x)$ függvényében?

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy.$$

Ezt behelyettesítve:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t,y) f(y) dy.$$

Állítás. A hővezetési feladat megoldása a végtelen rúdban:

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}dy.$$

1. speciális eset. A rúd kezdeti eloszlása Dirac delta függvény.

A rúd $t = 0$-ban a *középen egységnyi hőmennyiséget* kap.

(Erre a fv-re: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\delta(y)dy = \varphi(0)$, $\forall\varphi$.)

Ekkor

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4t}},$$