Matematikai Analízis III.

10. előadás.

Variációszámítás III.

2020. november 23.

Minimális felszín probléma. Ismétlés.

Plateau-feladat. Keressük azt a kétváltozós függvényt, amelynek *felülete minimális* az adott peremfeltételek mellett.

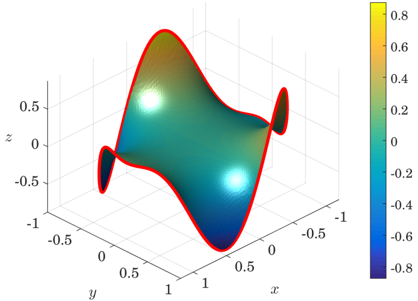
$S \subset \mathbb{R}^2$, $u : S \to \mathbb{R}$. $\quad u(x,y) = u_0(x,y)$ ha $(x,y) \in \partial S$

$$I(u) = \iint_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\, \mathrm{d}(x,y) \quad \longrightarrow \text{min?}$$

Pl. $S = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$u_0(x,y) = \sin(3x)\cos(3y)$,

ha $x^2 + y^2 = 1$



A feladat kitűzése

A variációszámítási feladatban kétváltozós függvényt keresünk.

$S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő, és adott $u_0 : \partial S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

A megengedett függvények halmaza:

$$\mathcal{C} = \{\phi : S \to \mathbb{R} \text{ sima}, \text{ és } \phi(x,y) = u_0(x,y), \text{ ha } (x,y) \in \partial S\},$$

Az alábbi funkcionál minimumát keressük:

$$I(\phi) = \iint_S F\left(x, y, \phi(x,y), \phi'_x(x,y), \phi'_y(x,y)\right) \, \mathrm{d}(x,y),$$

ahol $F = F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ sima függvény.

Optimum szükséges feltétele.

Tfh $u \in \mathcal{C}$ minimalizál. $I(u) \leq I(\phi)\ \forall \phi \in \mathcal{C}$.

Perturbáció iránya: $\eta : S \to \mathbb{R}$, melyre a $\eta(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in \partial S$.

$$G(\varepsilon) := I(u + \varepsilon\eta) \geq I(u) = G(0) \qquad \forall \varepsilon.$$

G-nek $\varepsilon = 0$-ban lokális minimuma van, ezért $G'(0) = 0$.

Kiszámoljuk.

$$G(\varepsilon) = I(u + \varepsilon\eta) =$$

$$= \iint_S F\left(x, y, u(.) + \varepsilon\eta(.), u'_x(.) + \varepsilon\eta'_x(.), u'_y(.) + \varepsilon\eta'_y(.)\right)\ \mathrm{d}(x, y).$$

Szélsőérték szükséges feltétele kétváltozós függvényekre

$G'(0) = 0$-ból "megszokott" módon / sokkal több számolással:

Tétel.

Tfh $u(x, y) \in \mathcal{C}$ minimalizálja az I költségfüggvényt. Ekkor

$u(x, y)$ kielégíti az Euler *parciális* differenciálegyenletet:

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0.$$

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0.$$

Példa. Legyen a költségfüggvény

$$I(\phi) = \iint_S |\mathrm{grad}\ \phi(x,y)|^2 \, \mathrm{d}(x,y),$$

az integrálban szereplő fv: $F(x, y, u, u'_x, u'_y) = u'^2_x + u'^2_y$.

Az Euler egyenlet: $L[u] = 0 - \frac{\partial}{\partial x} 2u'_x - \frac{\partial}{\partial y} 2u'_y = 0.$

Ezért az optimum feltétele a következő PDE teljesülése:

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \triangle u = 0.$$

Ez a **Laplace-egyenlet.**

Minimális felszín probléma, folyt.

$$I(u) = \iint_S \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}\,\mathrm{d}(x, y) \longrightarrow \text{min?}$$

A feladat *naiv* megoldása: $u'_x = u'_y = 0$, azaz $u \equiv$*konstans*.

Ez azonban csak akkor megoldás, ha a konstans függvény *megengedett*, vagyis ha u eleget tesz a peremfeltételeknek.

Tipikusan ez nem teljesül.

Megoldás: Írjuk fel az Euler egyenletet.

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u'_x} - \frac{\partial}{\partial y} F'_{u'_y} = 0.$$

Most $F(x, y, u, u'_x, u'_y) = \sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}$. Ekkor

$$F'_{u'_x} = \frac{u'_x}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}, \quad F'_{u'_y} = \frac{u'_y}{\sqrt{1 + (u'_x)^2 + (u'_y)^2}}.$$

Ezekkel $L[u] = 0$ egy *bonyolult parciális differenciálegyenlet* lesz.

Az Euler egyenletet kicsit átrendezve ezt kaphatjuk:

$$u''_{yy}(1 + {u'_x}^2) + u''_{xx}(1 + {u'_y}^2) - 2u'_x u'_y u''_{xy} = 0,$$

ami egy nehéz, másodrendű parciális differenciálegyenlet.

Ha u'_x és u'_y nagyon kicsi, akkor a *minimális felszín egyenlet*

$$\approx \; u''_{xx} + u''_{yy} = \triangle u = 0.$$

Példa. Rezgő húr mozgásegyenlete

Az m tömegű, ℓ hosszú, nyújtható húr két pont közt ki van feszítve. Valamilyen kezdeti erő hatására rezgés alakul ki.

A húr pozícióját minden t időpontban egy $x \mapsto u(t, x)$ függvény írja le, $0 \leq x \leq \ell$.

Tfh a végpontok rögzítve vannak: $u(t, 0) = u(t, \ell) = 0$.

Az $u : [t_0, t_1] \times [0, \ell] \to \mathbb{R}$ függvény írja le a húr alakjának változását t_0 és t_1 időpontok között.

Ezt a függvényt keressük a *Hamilton elv* alkalazásával.

Rögzített t-re a húr mozgási energiája:

$$K(t) = \frac{m}{2l} \int_0^{\ell} u_t'^2(t,x)\,dx,$$

ahol a pillanatnyi sebesség a t időpontban, az x helyen $u_t'(t,x)$.

Rögzített t-re a húr helyzeti energiája:

$$V(t) = \tau \left(\int_0^{\ell} \sqrt{1 + u_x'^2(t,x)} - 1 \right) dx,$$

ahol τ (ismert) rugalmassági együttható.

Hamilton elv: A húr mozgása t_0 és t_1 között :

$$I(u) = \int_{t_0}^{t_1} (K(t) - V(t))dt \quad \to \qquad \min?$$

$$I(u) = \iint_D \left(\frac{m}{2\ell} u_t'^2 - \tau \sqrt{1+u_x'^2} + \tau \right) d(x,t)$$

$$D = [0,\ell] \times [t_0, t_1] \qquad (\text{téglalap})$$

$$F(x,t,u,u_x,u_t) = \frac{m}{2\ell} u_t^2 - \tau \sqrt{1+u_x^2} + \tau$$

Euler egyenlet:

$$L[u] = F'_u - \frac{\partial}{\partial x} F'_{u_x} - \frac{\partial}{\partial t} F'_{u_t} = 0$$

$$F'_{u_t} = \frac{m}{2\ell} 2u_t \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{m}{\cancel{2}\ell} \cancel{2} u'_t(x,t)\right) = \frac{m}{\ell} u''_{tt}$$

$$F'_{u_x} = \frac{\tau u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}$$

$$F'_u = 0$$

$$L[u] = u''_{tt} - \frac{\ell\tau}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u'_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u'_x}{\sqrt{1+u'^2_x}} = \frac{u''_{xx} - u'_x \cdot \frac{u_x}{\sqrt{1+u'^2_x}}}{1+u'^2_x} =$$

$$= \frac{u''_{xx}}{1+u'^2_x} - \frac{u'^2_x}{(1+u'^2_x)^{3/2}} = (*)$$

$|u'_x|$ kicsi $\Rightarrow$ $(u'_x)^2$ nagyságrendű tagokat

el lehet hanyagolni, ezért

$$(*) \approx u''_{xx}$$

Az egyenlet közelítőleg:

$$u''_{tt} = \frac{\ell \tau}{m} u''_{xx}$$