Matematikai Analízis III.

10. előadás. 2. rész

Parciális Differenciálegyenletek

2020. november 23.

$\boxed{\text{P}\,\text{DE}}$

Egyenlet: ism-a fv. + deriváltak } DE

ODE ✓ PDE

$u = u(x, y, \dots)$

$u: U \to \mathbb{R}$ $U \subset \mathbb{R}^n$

Diff operátor: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multiindex

$\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} \qquad |\alpha| =$$

PDE: $F(D^{\alpha}_1, \dots) = 0$

PDE típusai.

Lineáris:

k-adrendű

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = f(x)$$

Pl: Laplace $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$

Hullám $u''_{tt} = k^2 u''_{xx}$

Nemlineáris

Pl: Eikonal / fény terjedése $\left| \operatorname{grad} u \right| = 1$

$$\sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = 1$$

Min felület

$$\operatorname{div} \left(\frac{\operatorname{grad} u(x,y)}{\sqrt{1 + u'^2_x + u'^2_y}} \right) = 0$$

PDE alapkérdések.

Alapkérdések:

Megoldhatóság ?

$\nexists$ általános módszer !

Folytonosság ?

(Kicsit megváltozó együtthatók $\longrightarrow$ mo „felrobban”)

Fizikai példák $\longrightarrow$ mat nem-megoldható!!

<u>PDE rendje</u> . / Lineáris PDE

Másodrendű Lineáris Állandó együtthatós

JÓL ill. ROSSZUL kondicionált feladat

A *rosszul kondicionált* feladat nem rossz. Idézet Maxwelltől:

For example, the rock loosed by frost and balanced on a singular point of the mountain-side, the little spark which kindles the great forest, the little word which sets the world afighting, the little scruple which prevents a man from doing his will, the little spore which blights all the potatoes, the little gemmule which makes us philosophers or idiots. Every existence above a certain rank has its singular points: the higher the rank, the more of them. At these points, influences whose physical magnitude is too small to be taken account of by a finite being may produce results of the greatest importance. All great results produced by human endeavour depend on taking advantage of these singular states when they occur.

Transzport egyenlet

Olyan $u(x,t)$ függvényt keresünk, melyre rögzített b mellett:

$$u'_t(x,t) + b \cdot u'_x(x,t) = f(x,t).$$

Ha $f(x,t) \equiv 0$, akkor *homogén* az egyenlet, egyébként *inhomogén*.

x: "hely", t "idő".

Vajon hogyan lehet az $u'_t + b \cdot u'_x = 0$ összefüggést értelmezni?

Homogén eset

Tekintsük az alábbi egyenlet, b adott paraméter:

$$u'_t(x,t) + bu'_x(x,t) = 0.$$

A kezdeti feltétel $u(x,0) = g(x)$, ahol g ismert függvény.

Legyen (x,t) rögzített pont. Mennyi $u(x,t) =?$

Definiáljuk $s \in \mathbb{R}$-re:

$$z(s) := u(x+bs, t+s), \qquad z(0) = u(x,t).$$

Deriváljuk a z függvényt:

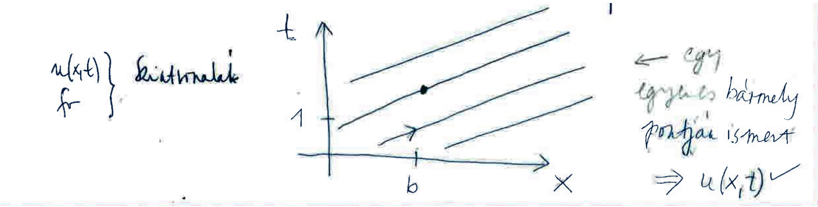
$$z'(s) = u'_x(x+bs, t+s)b + u'_t(x+bs, t+s) = 0.$$

Tehát $z(s)$ konstans. Speciálisan $s = -t$ választással:

$$u(x-bt, 0) = u(x,t).$$

$u(x, t) = u(x - bt, 0)$.

A kezdeti felételből $u(x - bt, 0) = \underline{g(x - bt) = u(x, t)}$.



Tehát a PDE-nek $\exists!$ megoldása, ha g deriválható.

Ha g *nem differenciálható*, akkor is az egyetlen ”értelmes” megoldás $u(x, t) = g(x - bt)$. Ez a GYENGE MEGOLDÁS.

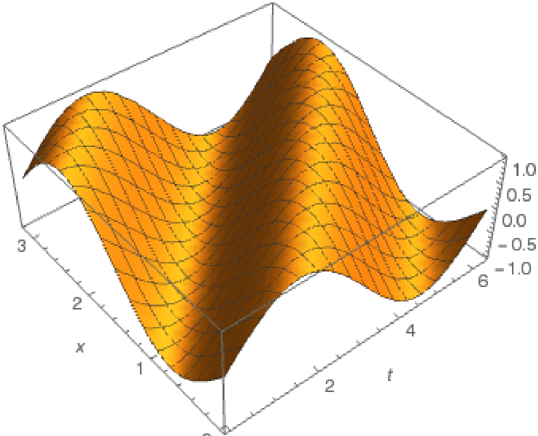
A kezdeti szingularitás időben tovább terjed.

Példa. Tekintsük az alábbi elsőrendű PDE-t:

$$u'_t(x,t) + 0.5u'_x(x,t) = 0, \qquad u(x,0) = \sin(x).$$

Ennek megoldása $u(x,t) = \sin(x - 0.5t)$.

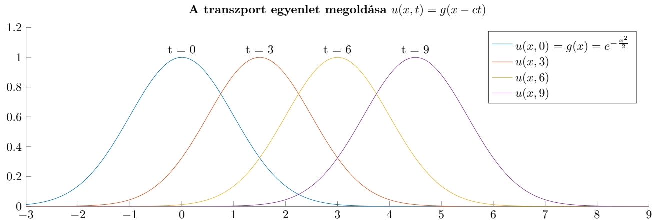
A megoldás felületének egy darabja $(x,t) \in [0,3] \times [0,6]$:



Homogén eset

Az alábbi ábrán $g(x) = e^{-x^2}$ kezdeti feltétel mellett az $u(x, t)$ grafikonja látható

- rögzített t értékekre
- x függvényében.



Inhomogén transzport egyenlet

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) + bu'_x(x,t) &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

ahol f és g adott függvények.

SZUPERPOZÍCIÓ ELVE lineáris PDE-re:

Az inhomogén feladatot két egyszerűbb részre bontjuk.

Ezzel u *két egyszerűbb feladat megoldásának összege lesz*.

Inhomogén transzport egyenlet.

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) + bu'_x(x,t) &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v'_t + bv'_x &= 0, \\ v(x,0) &= g(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} w'_t + bw'_x &= f(x,t) \\ w(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Ekkor $u = v + w$ megoldása lesz az eredeti feladatnak.

A homogén rész megoldását ismerjük,

$$v(x,t) = g(x - bt).$$

A nulla kezdeti feltételű, IH egyenlet megoldása

Rögzített (x, t) mellett definiáljuk a $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$z(s) := w(x + bs, t + s).$$

Ekkor $z(0) = w(x, t)$. A $z(s)$ deriváltja:

$$z'(s) = w'_x(x + bs, t + s)b + w'_t(x + bs, t + s) = f(x + bs, t + s).$$

Integráljuk $z'(s)$-et a $[-t, 0]$ intervallumon:

$$\int_{-t}^{0} z'(s)ds = z(0) - z(-t) = z(0).$$

hiszen $z(-t) = w(x + bt, 0) = 0$. Ez alapján a megoldás:

$$\underline{w(x,t) =} z(0) = \int_{-t}^{0} z'(s)\, ds = \int_{-t}^{0} f(x + bs, t + s)\, ds =$$

$$= \underline{\int_{0}^{t} f(x + b(s - t), s)\, ds}.$$

Az IH egyenlet megoldása.

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) + b u'_x(x,t) &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

Összefoglalva:

A homogén rész megoldása $v(x,t) = g(x - bt)$.

Az IH rész megoldása 0 kezdetiértékkel:

$$w(x,t) = \int_0^t f(x + b(s-t), s)\, ds.$$

A feladat teljes megoldása:

$$u(x,t) = g(x - tb) + \int_0^t f\big(x - (t-s)\, b, s\big)\, ds.$$