Kétváltozós függvények deriválása 3. rész

2021. március 8.

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben.

Ismétlés

Deriválhatóság. Összefoglalás

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D_f$.

Ha f *teljesen differenciálható* (x_0, y_0)-ban, akkor:

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)$,

ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Definíció. Az $(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$ *kétdimenziós* vektor a FÜGGVÉNY GRADIENSE az adott pontban.

$$\mathrm{grad}\, f(x_0, y_0) = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

Megjegyzés. A *teljesen differenciálható* tuljadonságot röviden úgy mondjuk, hogy *differenciálható*.

Differenciálható függvény

Következmény. Ha f diff-ható az (x, y) pontban, akkor így írható:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

$$= f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Geometriai jelentés: Ha f diff-ható (x_0, y_0)-ban, akkor a pont körül a függvény értékét közelíthetjük:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$. Ez az ÉRINTŐSÍK.

Érintősík

$$\boxed{f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|)}$$

Az érintősík egyenlete tehát ez lesz:

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

"Megszokott" sík egyenlet, $z_0 = f(x_0,y_0)$:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) + (-1)(z-z_0) = 0,$$

$$\Longrightarrow \quad f'_x(x_0,y_0)x + f'_y(x_0,y_0)y - z = C.$$

A sík (egyik) normálvektora $\underline{n} = (f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0),\ -1)$.

Példa. $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

$z = 2x^2 + y^2$ elliptikus paraboloid érintősíkja az $(1, 1, 3)$ pontban?

$$f'_x(x, y) = 4x \qquad f'_y(x, y) = 2y$$

$$\Longrightarrow \quad f'_x(1, 1) = 4 \qquad f'_y(1, 1) = 2.$$

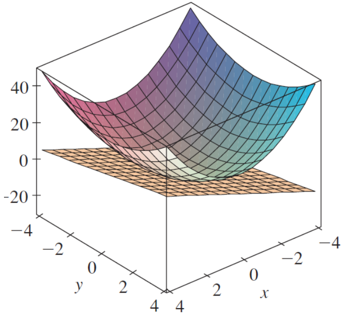
A fenti képlet alapján az érintősík egyenlete:

$$z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1)$$

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$z = 4x + 2y - 3$$

Normálvektor: $\underline{n} = (4, 2, -1)$.



Gradiens vektor

Definíció. Ha $f : S \to \mathbb{R}$ differenciálható az $(x, y) \in \mathrm{int} S$-ban,

akkor a DERIVÁLT egy kétdimenziós vektor, ez a GRADIENS:

$$\mathrm{grad}\ f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha az f függvény differenciálható $\forall(x, y) \in S$ pontban,

akkor a DERIVÁLT FÜGGVÉNY $\mathrm{grad}\ f : S \to \mathbb{R}^2$

Deriválhatóság, új forma

Ismétlés

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|).$$

Bevezetve a jelölést:

$$\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

a deriválhatósági összefüggés tömören így is írható:

$$\Delta f(x,y) = \mathrm{grad}\ f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Deriválhatóság és parciális deriváltak

Tétel. Adott $f : S \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) valamely U környezetében

- $\exists f'_x(x, y)$, $\exists f'_y(x, y)$ parciális deriváltak $\forall (x, y) \in U$,
- és ezek folytonosak (x_0, y_0)-ban.

Ekkor f differenciálható (x_0, y_0)- ban.

Megjegyzés. A Tétel feltétele *elégséges feltételt* ad a teljes differenciálhatóságra.

Biz. A Lagrange-féle középérték tételt alkalmazzuk:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\Big(f(x,y)-f(x,y_0)\Big)+\Big(f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\Big)=$$

$$=\Big(f'_y(x,\xi_y)\cdot\Delta y\Big)+\Big(f'_x(\xi_x,y_0)\cdot\Delta x\Big).$$

A parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$f'_y(x,\xi_y)=f'_y(x_0,y_0)+\varepsilon_1,\quad f'_x(\xi_x,y_0)=f'_x(x_0,y_0)+\varepsilon_2,$$

ahol $\lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_1=0,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2=0.$

Visszahelyettesítve:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

azaz f differenciálható.

Iránymenti derivált

Iránymenti derivált értelmezése

$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$ értékeit csak megadott α irányban nézzük:

$$\Delta x = \varrho \cos\alpha, \qquad \Delta y = \varrho \sin\alpha, \quad \varrho \in \mathbb{R}.$$

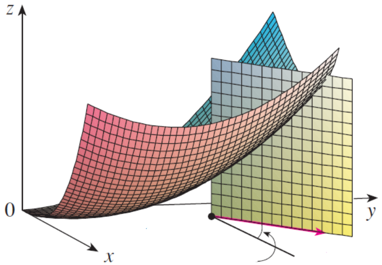
Definíció. Adott $\alpha \in [0, 2\pi)$. Az α irányú IRÁNYMENTI DERIVÁLT

$$D_\alpha f(x,y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

Másik jelölés:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x,y).$$



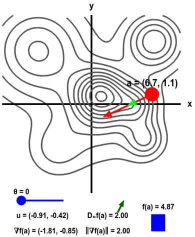
Iránymenti derivált, speciális esetek

$$\Delta x = \varrho \cos \alpha, \qquad \Delta y = \varrho \sin \alpha, \quad \varrho \in \mathbb{R}.$$

1. Ha $\alpha = 0$, akkor: $D_0 f(x, y) = f'_x(x, y)$.
2. Ha $\alpha = \pi/2$, akkor: $D_{\pi/2} f(x, y) = f'_y(x, y)$.

Megjegyzés.

$$\text{Differenciálhatóság} \quad \Longrightarrow \quad \text{"minden irányban sima"}.$$



Iránymenti derivált létezése

Állítás.

Tfh az f függvény differenciálható $(x, y) \in \operatorname{int} D_f$-ben.

Ekkor (x, y)-ban $\forall \alpha \in [0, 2\pi)$ esetén $\exists$ az iránymenti derivált, és

$$D_\alpha f(x, y) = f'_x(x, y) \cos \alpha + f'_y(x, y) \sin \alpha.$$

Következmény. A speciális esetek azonnal láthatók:

$$\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad D_0 f(x, y) = f'_x(x, y) \cos 0 + \cancel{f'_y(x, y) \sin 0}.$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad D_{\pi/2} f(x, y) = \cancel{f'_x(x, y) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} + f'_y(x, y) \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Biz. A differenciálhatóság miatt:

$$f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) =$$

$$= f(x,y) + f'_x(x,y)\varrho\cos\alpha + f'_y(x,y)\varrho\sin\alpha + o(\varrho).$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho} =$$

$$= f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha + \frac{o(\varrho)}{\varrho}$$

$$\longrightarrow \qquad f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha, \quad \text{ha} \quad \varrho \to 0+\,.$$

Iránymenti derivált, általában

Definíció. Adott $v = (v_1, v_2)$ irány, melyre $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$.

A v IRÁNYMENTI DERIVÁLT az (x, y) pontban:

$$D_v f(x, y) = \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v_1, y + \varrho v_2) - f(x, y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

Következmény. Ha f differenciálható, akkor *a* $D_v f(x, y)$ *iránymenti derivált kiszámítása:*

$$D_v f(x, y) = v_1\ f'_x(x, y) + v_2\ f'_y(x, y) = \langle \mathrm{grad}\ f, v \rangle.$$

Példa

Legyen $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

$f'_x(x,y) = 2x$, $f'_y(x,y) = 2y \quad \Longrightarrow \quad D_\alpha f(x,y) = 2x \cdot \cos\alpha + 2y \cdot \sin\alpha$.

Adott r sugarú kör mentén: $x_0 = r\cos\theta$, $y_0 = r\sin\theta$.

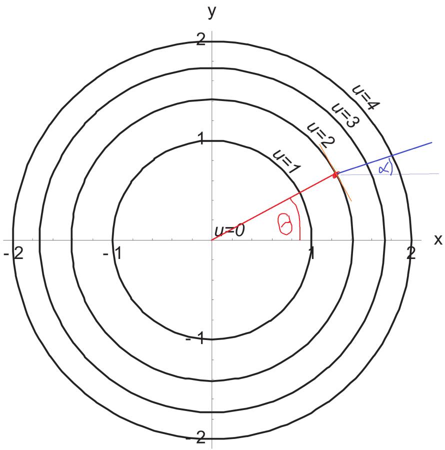
$$D_\alpha f(x_0, y_0) = 2r\cos\theta\ \cos\alpha + 2r\sin\theta\ \sin\alpha = 2r\cos(\theta - \alpha)$$

Látható, hogy

- $D_\alpha f(x_0, y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $|D_\alpha f(x_0, y_0)|$ minimális, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Vajon hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?

Az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai:



- $D_\alpha f(x_0, y_0)$ maximális, ha $\alpha = \theta$,
- $D_\alpha f(x_0, y_0) = 0$, ha $\theta - \alpha = \pi/2$.

Magasabb rendű deriváltak

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}S$.

f KÉTSZER DIFFERENCIÁLHATÓ ebben a pontban, ha

- f differenciálható a (x_0, y_0) egy környezetében, továbbá
- $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ is differenciálhatóak az (x_0, y_0) pontban.

Tétel. Ha f kétszer differenciálható $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}D_f$ pontban, akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

(Nem bizonyítjuk.)

Hesse mátrix

Definíció. Ha a függvény kétszer differenciálható (x_0, y_0)-ban, akkor a függvény MÁSODIK DERIVÁLTJA egy mátrix:

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$H(x_0, y_0)$ az adott ponthoz tartozó HESSE MÁTRIX.

Következmény. Hesse mátrix mindig szimmetrikus.

Megjegyzés. Egy kétváltozós függvény első deriváltja *kétdimenziós sorvektor*, második deriváltja 2×2 *dimenziós mátrix*.

Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Folytatás

Teljes derivált

$f: \ S \to \mathbb{R}$ n-változós valós függvény, x belső pontja S-nek.

Definíció. Az f függvény TELJESEN DIFFERENCIÁLHATÓ x-ben, ha $\exists A \in \mathbb{R}^n$, hogy $\forall \Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ elegendően kicsi megváltozás esetén, melyre $x + \Delta x \in S$:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|),$$

ahol $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + o(\|\Delta x\|)$

Tétel. Ha f differenciálható egy $a \in S$ belső pontban, akkor

$$A = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) =: \mathrm{grad}\, f(a).$$

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, $a \in \mathrm{int} S$. Tfh az a valamely U környezetében

- léteznek az $f'_{x_k}(x)$, $k = 1, \ldots n$ parciális deriváltak, $\forall x \in U$,
- és folytonosak a-ban.

Ekkor f differenciálható a- ban.

Második derivált

Definíció. Tfh az f függvény parciális deriváltfüggvényei teljesen differenciálhatóak $x \in D_f$-ben.

A MÁSODIK DERIVÁLT egy mátrix $H(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, melynek (i, j)-dik eleme

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

$H(x)$ az x pontbeli HESSE MÁTRIX.

Iránymenti derivált

Definíció. Adott az $f : S \to \mathbb{R}$, és $x \in \mathrm{int} S$. Adott egy $v = (v_1, \dots, v_n)$ irány, mely $\|v\| = 1$. Az f függvény v IRÁNYÚ DERIVÁLTJA:

$$D_v f(x) := \lim_{\varrho \to 0+} \frac{f(x + \varrho v) - f(x)}{\varrho},$$

ha a fenti határérték létezik és véges.

Tétel. Ha f teljesen differenciálható x-ben, akkor $\forall v$-re $\exists D_v f(x)$, és

$$D_v f(x) = v_1 f'_{x_1}(x) + \dots + v_n f'_{x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{x_i}(x) = \langle \mathrm{grad}\ f(x), v \rangle.$$