Kétváltozós függvények deriválása 2. rész

2021. március 3.

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben.

Ismétlés

Parciális derivált

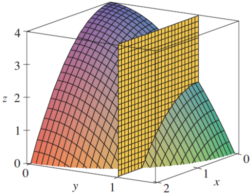
Definíció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$, és $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}S$.

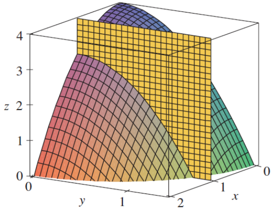
A függvény x szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLTJA (x_0, y_0)-ban:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}, \text{ ha létezik és véges.}$$

A függvény y szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLTJA az (x_0, y_0) pontban:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \text{ ha létezik és véges.}$$





Parciális deriválások sorrendje

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$. Tfh $\exists U$ környezete P_0-nak, melyben $\exists f''_{xy}$ és $\exists f''_{yx}$, és ezek (x_0, y_0)-ban *folytonosak*. Akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

(Azaz a deriválások sorrendje felcserélhető.)

Következmény. Ha a megfelelő parciális deriváltfüggvények folytonosak:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}.$$

és így tovább...

$$f^{(4)}_{xyxy} = f^{(4)}_{xxyy} = f^{(4)}_{yyxx} = \dots$$

Kitekintés $\mathbb{R}^n$-re

Pontok $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció. $\mathbb{R}^n$ elemei a rendezett szám n-esek:

$$P = (x_1, \dots, x_n), \qquad P' = (x'_1, \dots, x'_n).$$

Ezek az n DIMENZIÓS TÉR PONTJAI.

Példa. $P = (x_1, \dots, x_n)$ diákok testhőmérséklete 10-kor.

A két pont TÁVOLSÁGA:

$$\begin{aligned} \|P - P'\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2} = \\ &= \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2}. \end{aligned}$$

"Össz-Hőmérséklet" változása.

Halmazok $\mathbb{R}^n$-ben

Definíció. $P = (x_1, \ldots, x_n)$ *környezetei* n-dimenziós GÖMBök:

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x_1', \ldots, x_n') \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k')^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

Definíció. TÉGLALAP. Legyenek $a_k < b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots n$.

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n) : a_k \le x_k \le b_k, \ k = 1, \ldots, n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

$T = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ n-dimenziós INTERVALLUM.

Definíció. BELSŐ pont, HATÁRpont, KÜLSŐ pont ...HF

Függvény, definíciók

$S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós függvény.

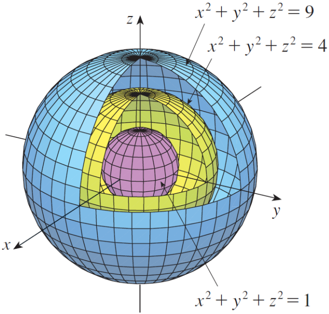
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n).$$

Speciális eset: $n = 3$. A változók (x, y, z).

"Ábrázolás": szint felületek.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. $\forall k \in R_f$

$$\{(x, y, z) \ : \ f(x, y, z) = k\}.$$



Függvény folytonossága, határértéke

Ugyanaz... Pl. a határérték:

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. n-változós fv.

Tfh $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$ egy torlódási pontja S-nek.

f HATÁRÉRTÉKE az x_0 pontban L, azaz

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy $\forall x \in S$-re

$$0 < \|x - x_0\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definíció. f FOLYTONOS az $x_0 \in D_f$ pontban, ha ....fejezzék be

Függvény parciális derivált

$f : S \to \mathbb{R}$ *n-változós* fv. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{int} S$.

Definíció. Az i-dik változó szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLT:

$$f'_{x_i}(x) = \lim_{\xi \to x_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots x_i, \ldots, x_n)}{\xi - x_i},$$

ha a fenti határtérték létezik és véges. További jelölés $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f(x)$

Definíció. Magasabb rendű parciális deriváltak, pl.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f, \qquad \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial^2 x_3} f, \qquad \text{stb.}$$

Teljes differenciálhatóság $\mathbb{R}^2$-ben

Ismétlés

"f differenciálható az $x \in \mathrm{int} D_f$ *pontban"*, ha a határérték létezik:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = A.$$

Ez azt jelenti, hogy ha Δx elég kicsi, akkor

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ahol A független Δx-től és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0.$$

Tehát f jól közelíthető *lineáris* függvénnyel.

Deriválhatóság

Definíció. Egy $h(x)$ függvény KISORDÓ a 0-ban, ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = 0.$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $h(x) = o(x)$. (Persze $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$ is!)

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$, és $(x, y) \in \mathrm{int} S$. Az f függvény DIFFERENCIÁLHATÓ (x, y)-ban, ha $\exists A, B, C$, melyekre

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

elegendően kicsi Δx és Δy mellett, A, B, C ftlenek $\Delta x, \Delta y$-tól.

Ismétlés:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Tétel. Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor

1. *folytonos* az (x, y) pontban,
2. és léteznek az (x, y) pontban a parciális deriváltak.

Továbbá a képletben szereplő konstansok:

$$C = f(x, y); \qquad A = f'_x(x, y); \qquad B = f'_y(x, y).$$

Bizonyítás

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

$$\text{Ha} \quad \Delta x = \Delta y = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C + 0 = C.$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + f(x,y) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

A folytonosság igazolása:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \longrightarrow 0.$$

Parciális deriváltak kiszámítása:

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}) = A.$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} (B + \frac{o(|\Delta y|)}{\Delta y}) = B.$$

Deriválhatóság. Összefoglalás

$f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D_f$.

Ha f diff-ható (x_0, y_0)-ban, akkor:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|),$$

ahol $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Definíció. Az $(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ *kétdimenziós* vektor a FÜGGVÉNY GRADIENSE az adott pontban.

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$$