Kétváltozós függvények 2. rész

2021. március 1.

Határérték $\mathbb{R}^2$-ben.

Határérték

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$. Kétváltozós fv.

Tfh $P_0 = (x_0, y_0)$ egy torlódási pontja S-nek.

f HATÁRÉRTÉKE a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban L, azaz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy $\forall(x,y) \in S$-re

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Átviteli elv

Ismétlés: határérték.

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x,y)-L| < \varepsilon.$$

Tétel. A következő két állítás ekvivalens:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$.
2. $\forall (P_n) \subset S$ sorozatra, $P_n = (x_n, y_n) \neq P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\text{ha} \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

1. Példa. $S = \{(x, y), y > 0\}$, és $f(x, y) = e^{-x^2/y}$

Legyen $P_0 = (x_0, 0)$, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y\to 0+} e^{-x_0^2/y} = 0.$$

Vajon $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$?

Tfh az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a $(0, 0)$-hoz.

$k > 0$ fix, és $P_n := (x_n, kx_n^2)$, ahol $x_n \to 0$. Ekkor $\lim P_n = (0, 0)$.

$$f(P_n) = e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = e^{-\frac{1}{k}}.$$

Tehát a $(0, 0)$-beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke *nem létezik* a $(0, 0)$ pontban.

2. Példa.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y} & \text{ha} \quad 3x-y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és nézzünk két pontsorozatot:

$$P_n = (a_n, a_n^2), \qquad P'_n = (a_n^2, a_n).$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_n = (0,0)$. Másrészt

$$f(P_n) = \frac{1/n + 2/n^2}{3/n - 1/n^2} = \frac{n+2}{3n-1}, \qquad f(P'_n) = \frac{1+2n}{3-n},$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} f(P'_n) = \frac{1}{3}, \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = -2.$$

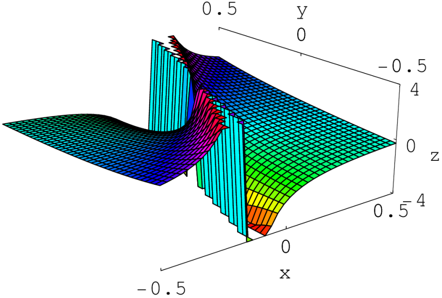
Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek.

Háttér: $(0,0)$-beli határérték "kétfajta közelítéssel"

$$1.)\qquad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x+2y}{3x-y}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

$$2.)\qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x+2y}{3x-y}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{-y}=-2$$

$-2\neq\frac{1}{3}$, ezért nincs határérték.



... és ha a fenti határértékek egyenlőek lennének...?

Differenciálszámítás $\mathbb{R}^2$-ben.

Valós függvény derivált kiterjesztés?

Ismétlés.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in \operatorname{int} D_f$. f DIFFERENCIÁLHATÓ x_0-BAN, ha

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Közvetlen kiterjesztés két változóra?

$f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$ és $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} S$, belső pont.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{(x,y) - (x_0,y_0)} = \ \ldots \quad \text{Gond?}$$

Parciális derivált

Definíció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$, és $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

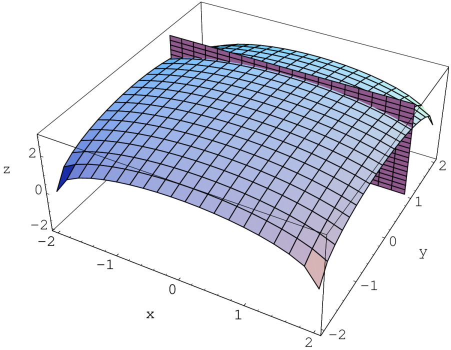
A függvény x szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLTJA (x_0, y_0)-ban:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

ha létezik és véges a fenti határérték.

Jelölés: $f'_x(x_0, y_0)$, vagy $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

x szerinti parciális derivált



Rögzített $y = 1$ mellett egy-változós függvényt kapunk. Ennek deriváltját számoljuk.

Parciális derivált

Definíció. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$, és $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

A függvény y szerinti PARCIÁLIS DERIVÁLTJA az (x_0, y_0) pontban:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

ha létezik és véges a fenti határérték.

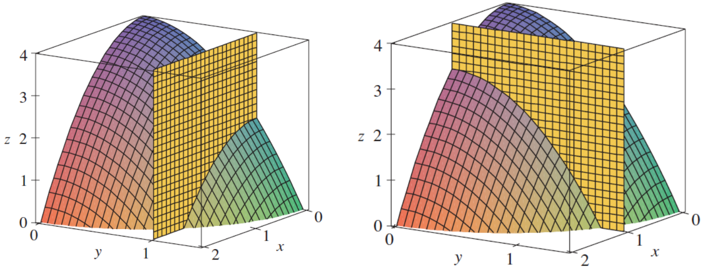
Jelölés: $f'_y(x_0, y_0)$, vagy $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Parciális deriváltak

A parciális deriváltak most is számolhatók így:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$



Példa

$f(x,y) = x^2 y$. Ennek parciális deriváltjai

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 y - x^2 y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xhy + h^2 y}{h} = 2xy.$$

Hasonlóan

$$f'_y(x,y) = \ = \lim_{h\to 0} \frac{x^2(y+h) - x^2 y}{h} = \ = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 h}{h} = x^2.$$

Parciális deriváltak értelmezése

Rögzített y_0 mellett $f_1(x) := f(x, y_0)$ egyváltozós valós függvény.

Ha $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D_f$, $\Longrightarrow x_0 \in \operatorname{int} D_{f_1}$. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = f_1'(x_0).$$

Rögzített x_0 mellett $f_2(y) := f(x_0, y)$ egyváltozós valós függvény.

Ha $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D_f$ $\Longrightarrow y_0 \in \operatorname{int} D_{f_2}$. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = f_2'(y_0).$$

Definíció. f_1 és f_2 az eredeti függvény METSZETFÜGGVÉNYEI.

Parciális deriváltfüggvény

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Tfh $\forall (x, y) \in S$ esetén létezik $f'_x(x, y)$.

A PARCIÁLIS DERIVÁLTFÜGGVÉNY:

$$f'_x : S \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f'_x(x, y).$$

A parciális deriváltfüggvény ugyanolyan típusú, mint az eredeti: *kétváltozós, valós függvény*.

Másodrendű parciális deriváltak

Definíció. Ha a parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor MÁSODRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLTat kapunk.

Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_x(x, y+h) - f'_x(x,y)}{h}.$$

További jelölések: $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f''_{xy}(x,y)$

$f''_{xy}(x,y)$ és $f''_{yx}(x,y)$ a VEGYES másodrendű parciális deriváltak.

$f''_{xx}(x,y)$ és $f''_{yy}(x,y)$ a TISZTA másodrendű parciális deriváltak.

Példa

$$f(x,y) = x^2 - xy + 3y^2.$$

Az elsőrendű deriváltak:

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x - y, \\ f'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -x + 6y. \end{aligned}$$

A másodrendű deriváltak:

$$f''_{xx}(x,y) = 2, \qquad f''_{yy}(x,y) = 6,$$

$$f''_{yx}(x,y) = -1, \qquad f''_{xy}(x,y) = -1.$$

Magasabb rendű parciális deriváltak

Definíció. Ha a másodrendű parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor HARMADRENDŰ PARCIÁLIS DERIVÁLTat kapunk.

Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f''_{xx}(x, y+h) - f''_{xx}(x,y)}{h}.$$

További jelölések: $\dfrac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x,y) = f'''_{xxy}(x,y)$

És így tovább...Negyed- ötödrendű parciális deriváltak.

Parciális deriváltak és folytonosság?

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A parciális deriváltak *léteznek* a $(0,0)$ pontban:

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Mégis, f *nem folytonos* $(0,0)$-ban! Valóban, a $y = kx$ mentén

$$f(x,kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

$(0,0)$-hoz tartva a határérték k-tól függ. Szemléletesen...

Parciális deriváltak és folytonosság

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, kétváltozós valós függvény, $(x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$.

Tfh az (x_0, y_0) vmely $U \subset \mathbb{R}^2$ környezetében $\exists f'_x$ és $\exists f'_y$, és ezek korlátosak:

$$|f'_x(x, y)| \leq M, \qquad |f'_y(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in U.$$

Ekkor az f függvény folytonos az (x_0, y_0)-ban.

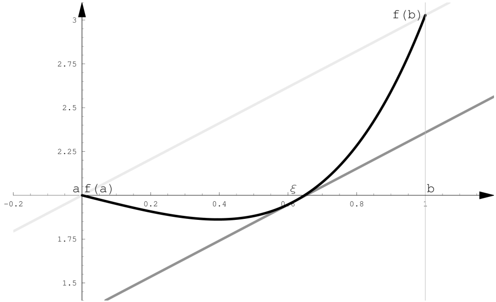
Bizonyításhoz előkészület:

Ismétlés

Tétel. *(Lagrange-féle középérték tétel)*

Tfh $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor $\exists \xi \in (a, b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Lagrange-féle középértéktétel, újra

Kicsit másképpen:

Tétel. Legyen $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ differenciálható.

Ekkor $\exists \xi \in (a, a+h)$, melyre:

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(\xi).$$

Legyen $\xi = a + \theta h$, ahol $0 < \theta < 1$. Ekkor

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h.$$

Tétel bizonyítás

Folytonosságot kell belátni.

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq |f(x,y)-f(x,y_0)| + |f(x,y_0)-f(x_0,y_0)| = (*).$$

A Lagrange-féle középértéktételt használjuk:

$$f(x,y)-f(x,y_0) = f_2(y)-f_2(y_0) = f_2'(\xi_y)\Delta y = f_y'(x,\xi_y)\Delta y.$$

$$f(x,y_0)-f(x_0,y_0) = f_1(x)-f_1(x_0) = f_1'(\xi_x)\Delta x = f_x'(\xi_x,y_0)\Delta x.$$

$$\Longrightarrow \quad (*) \leq |f_x'(\xi_x,y_0)||\Delta x| + |f_y'(x,\xi_y)||\Delta y| \leq M(|\Delta x|+|\Delta y|).$$

Tehát

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq M(|\Delta x|+|\Delta y|) \leq M\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Tehát a függvény *folytonos* (x_0,y_0)*-ban*.

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ nem folytonos az origóban. Magyarázat.

Az előző példa folytatása.

Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor az x szerinti parciális derivált:

$$f'_x(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ez nem korlátos az origó közelében, hiszen pl $y = 2x$ esetén

$$f'_x(x,2x) = \frac{6x^3}{25x^4} = \frac{6}{25x},$$

és ezért $|f'_x(x,2x)| \to \infty$ ha $x \to 0$. Tehát nem meglepő, hogy a függvény az origóban nem folytonos.

Parciális deriválások sorrendje

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{int} S$. Tfh $\exists U$ környezete P_0-nak, melyben

1. léteznek f''_{xy} és f''_{yx},
2. és ezek (x_0, y_0)-ban *folytonosak*.

Akkor

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

A fenti feltételek mellett itt a DERIVÁLÁSOK SORRENDJE FELCSERÉLHETŐ.

A Tételt nem bizonyítjuk.

Parciális deriválások sorrendje

Következmény. Ha a megfelelő parciális deriváltfüggvények folytonosak:

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx}.$$

és így tovább...

Feltéve, hogy a parciális deriváltak folytonos függvények, akkor:

$$f^{(4)}_{xyxy} = f^{(4)}_{xxyy} = f^{(4)}_{yyxx} = \ldots$$