Kétváltozós függvények

2021. február 24.

Kétváltozós függvények

Függvény megadása

Téglalap területe. $T = x \cdot y \quad \Longrightarrow \quad T = T(x, y).$

Mozgási energia. $E = \frac{1}{2} m v^2 \quad \Longrightarrow \quad E = E(m, v).$

Definíció. Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány.

$$f : S \to \mathbb{R} \qquad f : (x, y) \mapsto u, \qquad (x, y) \in S.$$

$$\text{ÉT} : \quad D_f \; (=\text{"domain"}), \qquad \text{ÉK} : \; R_f \; (=\text{"range"})$$

$$\boxed{u = f(x, y)}$$

(x, y): független változók, u: függő változó.

Példa. $u = \sin(xy)$ vagy $u = \ln\big(y^2 + \cos(x/2)\big)$. ...

Legegyszerűbb példák

1. *Lineáris függvény.* $f(x,y) = ax + by + c$, $D_f = \mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6, \quad D_f = \mathbb{R}^2.$$

Definíció. $\textsc{Polinom}$ = monomiálok összege.

Egy $\textsc{monomiál}$: $a_{mn}x^my^n$. Együtthatója $a_{mn} \in \mathbb{R}$, foka: $m + n$.

Polinom foka = ...

Egy polinom $\textsc{homogén}$, ha a monomiáljainak foka ugyanaz.

Például $\textsc{homogén másodfokú polinom}$:

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

Geometriai reprezentáció

Ismétlés. Egyváltozós függvény $\approx$ görbe két dimenzióban

Kétváltozós függvény $\approx$ felület három dimenzióban

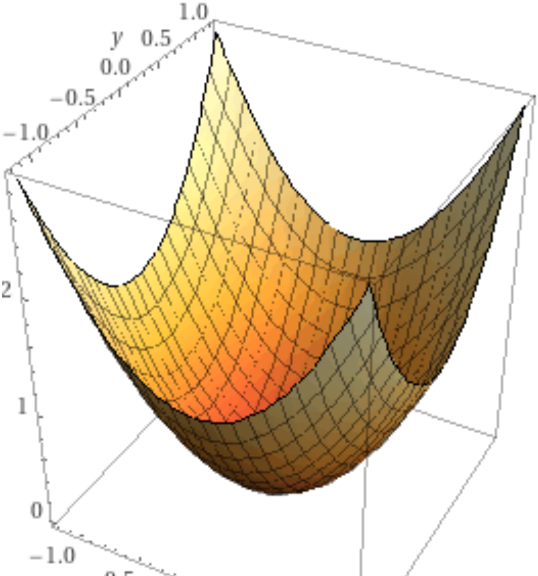
Az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármasok írják le, ahol $(x, y) \in S$ és $u = f(x, y)$. Az alábbi pontok:

$$\{(x, y, u) : \ u = f(x, y), \ (x, y) \in S\} \subset \mathbb{R}^3$$

felületet alkotnak a térben.

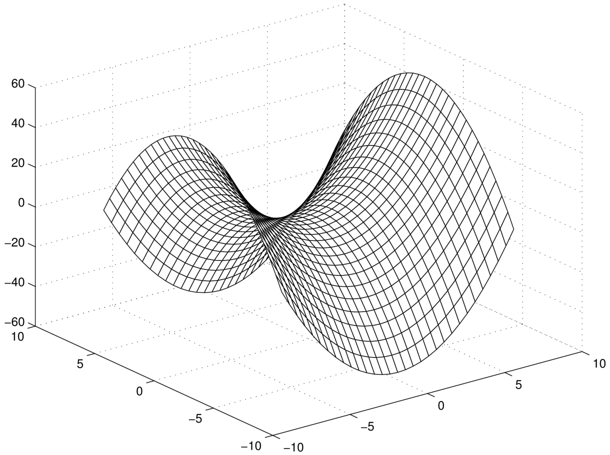
1. Példa felületre

Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja:



2. Példa felületre

Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja:



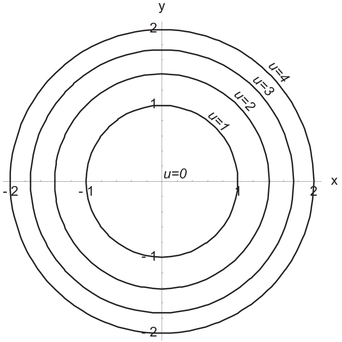
Szintvonalak $\mathbb{R}^2$-ben

A síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre

$$f(x, y) = k, \quad \text{rögzített } k \in R_f$$

Definíció. Ezek a SZINTVONALAK.

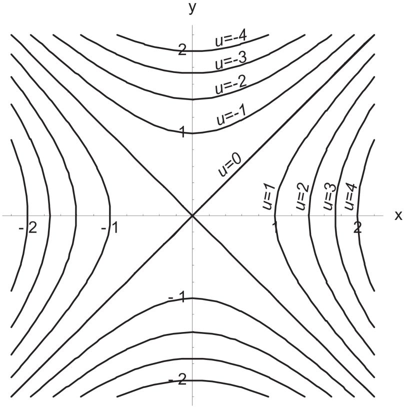
Példa. $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök:
$u = x^2 + y^2 = k$



Szintvonalak $\mathbb{R}^2$-ben. További példa.

Példa. $f(x,y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak *hiperbolák* és *egyenesek*:

$$u = x^2 - y^2 = k$$



Folytonosság $\mathbb{R}^2$-ben

Folytonosság

Definíció. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Legyen $P_0 = (x_0, y_0) \in D$.

Az f függvény FOLYTONOS (x_0, y_0)-ban, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, melyre

$$\forall (x, y) \in D_f, \qquad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

esetén teljesül, hogy

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Sorozatfolytonosság

Definíció.

Az f függvény SOROZATFOLYTONOS a $P_0 \in D_f$ pontban,

ha $\forall (P_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0).$$

Folytonosság $\equiv$ Sorozatfolytonosság

Tétel.

Az f függvény *folytonos* P_0-ban $\Longleftrightarrow$ sorozatfolytonos P_0-ban.

BIZ. Teljesen analóg az egyváltozós esettel, *HF.*

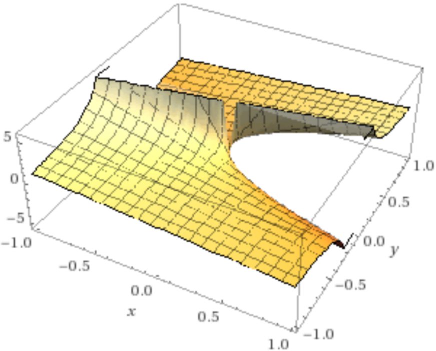
Következmény. Folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos.

Definíció. Ha az f függvény $P_0 \in D_f$-ben nem folytonos, akkor ott SZAKADÁSA van.

1. Példa folytonosságra és szakadásra

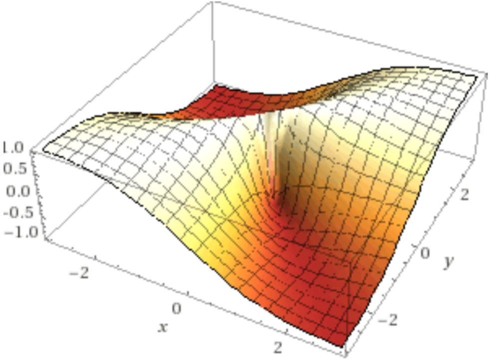
$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

A függvény $\forall(x, y)$ pontban folytonos, ahol $y \neq 0$.



2. Példa folytonosságra és szakadásra

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$$f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

A függvény (x,y)-ban folytonos, ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$.

Ha $y \neq 0$, akkor $f(\cdot, y)$ folytonos, és $\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0 = f(0,y)$.

Ha $x \neq 0$,akkor $f(x,\cdot)$, folytonos, és $\lim_{y\to 0} f(x,y) = 0 = f(x,0)$.

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Az egyenes mentén $f(x,x) \equiv 1$.

Legyen $P_n = (a_n, a_n)$, ahol (a_n) nullsorozat, akkor

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = 1 \neq f(0,0).$$

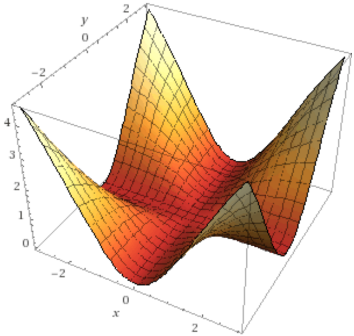
Tehát f *nem folytonos* $(0,0)$*-ban*, és *folytonos* mindenütt másutt.

3. Példa folytonosságra

3. Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Folytonos-e a $(0,0)$ pontban? Tipp?



$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0)$.

A pontsorozat polárkoordinátákban: $P_n = (r_n, \theta_n)$.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0) \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} r_n = 0, \quad (\theta_n) \text{ bármi lehet}$$

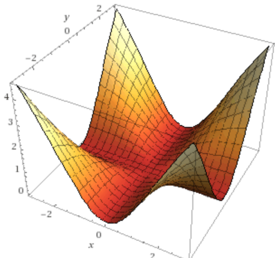
Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r^2\sin^2(\theta)}{r^2} = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta).$$

Ezért valóban

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = 0 = f(0,0),$$

tehát f *folytonos az origóban*.

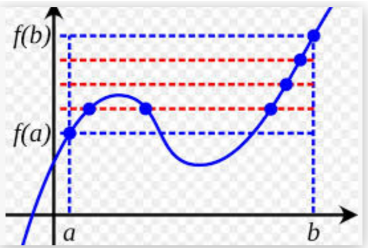


Kitérő: Bolzano tétel egyváltozós függvényekre

Tétel.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$.

Ekkor $\forall c$, $f(a) < c < f(b)$-hez $\exists \xi \in (a, b)$,melyre $f(\xi) = c$.



Bolzano tétel kétváltozós függényekre

Tétel. $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő.

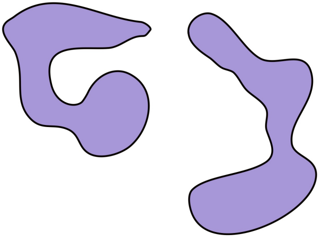
Adottak $P = (x, y) \in S$ és $P' = (x', y') \in S$, melyekre

$$a = f(x, y) < f(x', y') = b.$$

Ekkor $\forall c \in (a, b)$-hez $\exists Q = (x_0, y_0) \in S$ pont, melyre

$$f(x_0, y_0) = c.$$

Példa nem összefüggő tartományra:



Vajon ebben az esetben miért nem igaz a Bolzano tétel?

Bolzano tétel bizonyítás

S összefüggő, ezért $\exists \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ folytonos vonal, melyre

$$\gamma(\alpha) = (x, y), \qquad \gamma(\beta) = (x', y').$$

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in S$, és a koordináta-függvények folytonosak.

Definiáljuk $F(t) := f \circ \gamma(t) = f(x(t), y(t))$.

$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonos, melyre $F(\alpha) = a$, és $F(\beta) = b$.

$a < c < b \quad \Longrightarrow \quad \exists \xi \in (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$.

Ezért a $Q := \gamma(\xi) \in S$ pontra $f(Q) = c$. RAJZ?

Egyenletes- és Lipschitz folytonosság

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. f EGYENLETESEN FOLYTONOS S-ben, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\text{ha} \qquad \|P - P'\| < \delta \qquad \text{akkor} \qquad |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

A $\delta = \delta(\varepsilon)$ szám az ε-hoz tartozó FOLYTONOSSÁGI MODULUS.

Definíció. $f : S \to \mathbb{R}$ LIPSCHITZ FOLYTONOS S-ben, ha $\exists L > 0$, melyre

$$|f(P) - f(P')| \le L \cdot \|P - P'\|, \qquad \forall P, P' \in S.$$

Az L szám LIPSCHITZ-KONSTANS.

Egyenletes- és Lipschitz folytonosság

Állítás.

1. Ha f egyenletesen folytonos S-n $\implies$ $\forall P \in S$ pontban folytonos
2. Ha f *Lipschitz* folytonos egy tartományban $\implies$ ott *egyenletesen* is folytonos.

Bizonyítás. 2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz a $\delta := \dfrac{\varepsilon}{L}$ $\surd$

Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

Tétel. (*Heine tétel*) $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt tartomány. Tfh $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen is folytonos.

Biz. Indirekt. Tfh f *nem egyenletesen* folytonos. Ekkor $\exists \varepsilon > 0$, melyre ("$\forall \delta$ rossz"): $\forall \delta > 0$-hoz $\exists P, P'$:

$$\|P - P'\| < \delta, \qquad \text{de} \qquad |f(P) - f(P')| > \varepsilon. \tag{1}$$

$\delta = \dfrac{1}{n}$-hez is $\exists P_n, P_n'$, hogy

$$\|P_n - P_n'\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P_n')| > \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

S korlátos $\implies$ (P_n), (P_n') korlátosak, $\implies$ $\exists$ konvergens rész-sorozatuk.

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P_n' = P'.$$

(Előzö oldalról)

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P'_n = P', \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| > \varepsilon.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$. Legyen $\eta > 0$ tetszőleges.

$$\|P - P'\| = \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq$$

$$\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3}.$$

Így a $P = P' \in S$ pontban f folytonos $\Longrightarrow$ sorozatfolytonos.

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = \lim_{n\to\infty} f(P'_n). \qquad \Rightarrow\!\Leftarrow$$

Weierstrass I. tétele

Tétel. Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos és zárt*. $f : S \to \mathbb{R}$ *folytonos* függvény. Ekkor f *korlátos*.

Biz. Indirekt. Tfh R_f nem korlátos. Ekkor $\forall n$-hez

$$\exists P_n = (x_n, y_n) \in S : \qquad |f(x_n, y_n)| > n.$$

(P_n) korlátos. $\quad \Longrightarrow \quad \exists (P_{n_k})$ konvergens, $\lim P_{n_k} =: P_0$.

S zárt, ezért $P_0 \in S$, és itt f folytonos.

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) = f(x_0, y_0) < \infty,$$

de az indirekt feltevés szerint $|f(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k$, $n_k \to \infty$. $\Rightarrow\!\Leftarrow$

Weierstrass II. tétele

Tétel. $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.

Ekkor f felveszi a maximumát és minimumát.

Biz. $\beta := \sup R_f < \infty$. Ekkor $\exists (h_n) \subset R_f$, hogy

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \beta, \qquad \text{ahol} \quad h_n = f(x_n, y_n).$$

$(P_n) = ((x_n, y_n)) \subset S$ korlátos, tehát $\exists (P_{n_k})$ konvergens.

S zárt, ezért $P := \lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k} \in S$. P pontban f folytonos, tehát

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P), \qquad \lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = \beta,$$

ezért $f(P) = \beta \in R_f \quad \Longrightarrow \quad \beta = \max R_f$.