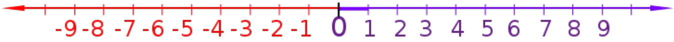
Kétváltozós függvények. 1. rész

2021. február 22.

Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

$\mathbb{R}^2$ pontjai

Ismétlés: $\mathbb{R}$ a valós számok halmaza.



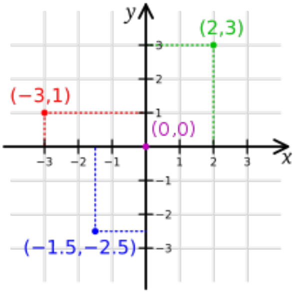
$\mathbb{R}^2$: számpárok halmaza:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$$

Azonosítás.

A számsík pontjai $\equiv$ rendezett számpárok

$$P = (x, y)$$



Távolság

Definíció. $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad \text{RAJZ}$$

További jelölések: $\rho(P, P')$, $\|P - P'\|$. Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

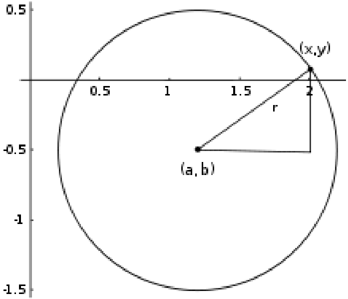
Háromszög egyenlőtlenség

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

r-sugarú "gömb"

Definíció. Legyen adott a $C \in \mathbb{R}^2$ pont, $C = (a, b)$, és az $r > 0$ valós szám. A C pont körüli r-SUGARÚ GÖMB:

$$S(C, r) = \{P \in \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < r\}.$$



Egy körlemezt kapunk C középponttal.

Pontsorozat a síkon

Definíció. Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat:

$$P_n^{(1)} = (n, n^2), \qquad P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2). \quad \text{RAJZ}$$

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

Pontsorozat korlátossága

Definíció. A (P_n) sorozat KORLÁTOS, ha $\exists S(C, r)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza.

Azaz (P_n) korlátos, ha létezik $\exists C = (a, b)$ és $\exists r > 0$:

$$\sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < r \qquad \forall P_n = (x_n, y_n).$$

1. *Példa.* (folytatás)
   $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos,

   $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

Pontsorozat konvergenciája

Definíció. A $(P_n) \subset \mathbb{R}^2$ sorozat KONVERGENS és HATÁRÉRTÉKE $Q \in \mathbb{R}^2$, ha

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n - Q\| = 0. \tag{1}$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q.$$

Megjegyzés. Az (1) egyenletben *számsorozat* konvergenciája szerepel.

Pontsorozat konvergenciája

Definíció. *(Ekvi)* A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy

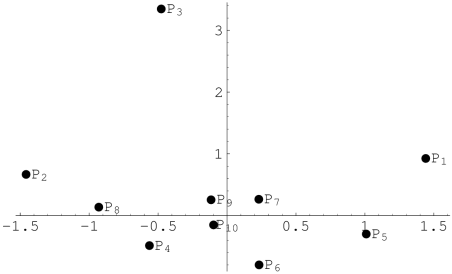
$$\forall n \geq N(\varepsilon) : \quad \|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

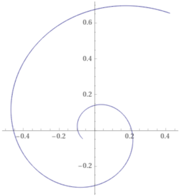
Másképp fogalmazva: $\forall \varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ *gömbön kívül* csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

Pontsorozat példa

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4}\cos(n), e^{-n/4}\sin(n))$, $n \in \mathbb{N}$.





$$\|P_n - (0,0)\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2}\cos^2 n + e^{-n/2}\sin^2 n} =$$

$$= \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4} \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = (0,0).$$

Pontsorozat koordinátái

Állítás. Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot.

Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:

1. (P_n) konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = Q = (x, y)$.
2. Az (x_n) és (y_n) sorozatok konvergensek és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

$(P_n) = ((x_n, y_n))$ konvergenciája. Bizonyítás

1. $\Rightarrow$ 2. $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy $\forall n \geq N(\varepsilon)$-re $\|P_n - Q\| < \varepsilon$.

Ekkor

$$|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon, \qquad |y_n - y| < \cdots < \varepsilon.$$

2. $\Rightarrow$ 1. $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$ így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Cauchy-féle feltétel

Definíció.

A (P_n) sorozat teljesíti a CAUCHY-FÉLE FELTÉTELT, ha

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre

$$\forall n, m \geq N : \qquad \|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

Állítás.

(P_n) pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.

Cauchy $\Longleftrightarrow$ konvergens

Biz. $\Longleftarrow$

Tfh a sorozat konvergens. Legyen ε tetszőleges. Akkor $\exists N$ küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2 \qquad \forall n \geq N.$$

Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor

$$\|P_n - P_m\| \leq \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

A másik irányt nem bizonyítjuk.

Bolzano-Weierstrass tétel $\mathbb{R}^2$-ben

Tétel. Ha (P_n) korlátos pontsorozat a síkon, $P_n = (x_n, y_n)$,

akkor van konvergens részsorozata.

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos, akkor (x_n) és (y_n) is korlátosak.

Ezért létezik (x_n)-nek konvergens részsorozata: (x_{m_k}),

és (y_{m_k})-nak is van konvergens részsorozata: (y_{n_k}).

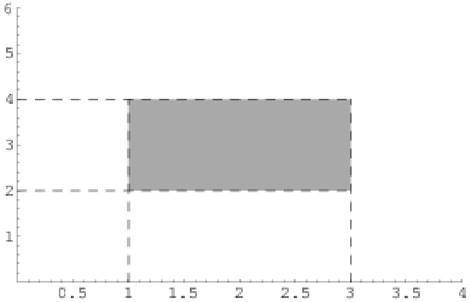
Ekkor $(P_{n_k} = (x_{n_k}, y_{n_k}))$ konvergens.

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait TARTOMÁNYoknak is nevezzük.

Példa. TÉGLALAP. Legyenek $a < b$ és $c < d$ adott valós számok:

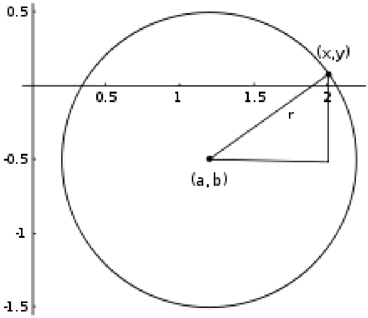
$$T = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d].$$



Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Példa. GÖMB. (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.)
Legyen $r > 0$ valós szám és $C = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$S(C, r) = \{(x, y) : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}.$$



Környezet

Ismétlés. 1-dimenzióban az $a \in \mathbb{R}$ pont környezetei:

$U = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén.

Ezt általánosítjuk.

Definíció. $P = (x, y)$ pont környezetei $U = S(P, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2$

tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén.

$S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány

Definíció. $Q \in S$ BELSŐ PONTJA S-nek, ha Q-nak $\exists U$ környezete: ,

melyre $U \subset S$.

$Q \in \mathbb{R}^2$ KÜLSŐ PONTJA S-nek, ha Q-nak $\exists U$ környezete: $U \cap S = \emptyset$.

$Q \in \mathbb{R}^2$ HATÁRPONTJA S-nek, ha Q-nak $\forall U$ környezetére: $\exists P' \in U : P' \in S$, és $\exists P'' \in U : P'' \notin S$.

Következmény. $\forall S \subset \mathbb{R}^2$ esetén a sík 3 diszjunkt részre osztható:

$$S = \mathrm{ext}(S) \cup \mathrm{int(S)} \cup \partial \mathrm{S}.$$

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció. Az S halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. S nyílt, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz lezárása:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. Az $S(C, r)$ gömb *nyílt* halmaz. (Miért?)

Ennek határpontjai, ill. lezárása:

$$\partial S(C, r) = \{P : \ \|P - C\| = r\},$$

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \ \|P - C\| \leq r\}.$$

Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : \ x, y \in \mathbb{Q}\}$. Ekkor $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

Definíció. P az S halmaz torlódási pontja, ha $\exists (P_n) \subset S$ sorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

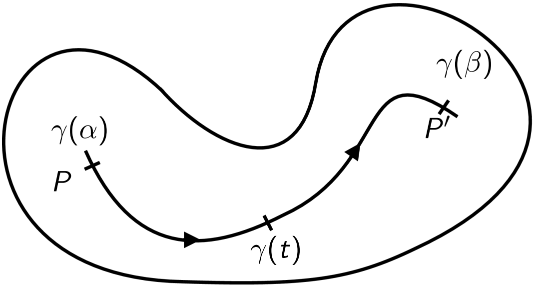
Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok.

Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció. Adottak $P, P' \in \mathbb{R}^2$. Az ezeket összekötő VONAL egy függvény ÉK-e, melyre

$$\gamma : [\alpha, \beta] \;\to\; \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(\alpha) = P, \qquad \gamma(\beta) = P'.$$



Két pontot összekötő vonal.

Folytonos vonal $\mathbb{R}^2$-ben

A $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje $\gamma(t) =: (x(t), y(t))$.

$$x, y : [\alpha, \beta] \;\to\; \mathbb{R}$$

Tfh az $(x(t),\ y(t))$ koordináta-függvények folytonosak.

A $\{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ vonal is $\mathbb{R}^2$-beli részhalmaz, természetes módon.

Definíció. $S \subset \mathbb{R}^2$ ÖSSZEFÜGGŐ, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.

Szakasz $\mathbb{R}^2$-ben

Definíció. Legyen $P = (x, y)$, $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$.

A két pontot összekötő SZAKASZT az alábbi függvény írja le:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \qquad \gamma(t) := P + t(P' - P).$$

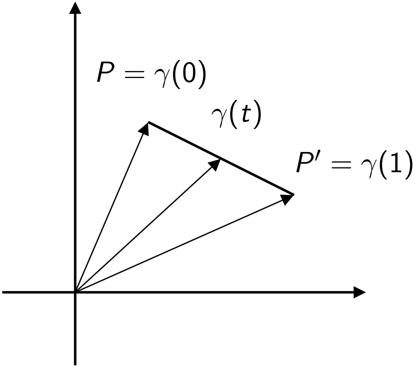
Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$, $\gamma(1) = P'$.

Definíció. Az $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány KONVEX, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.

Szakasz $\mathbb{R}^2$-ben: $\gamma(t) := P + t(P' - P)$

A szakasz is folytonos vonal, az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$x(t) = x + t(x' - x), \qquad y(t) = y + t(y' - y).$$



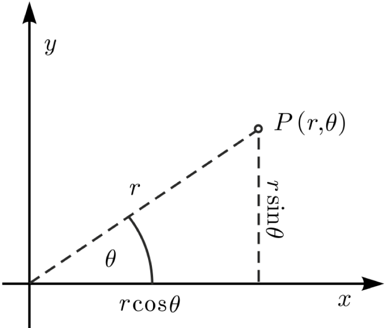
Két pontot összekötő szakasz.

Polárkoordináták

Eddig síkbeli pontot Descartes-féle koordinárendszerben adtuk meg. $P = (x, y)$.

Definíció. Egy $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátái (r, θ), melyek:

- r: a pont origótól vett távolsága, $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- θ: az origóból a pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge, $\theta \in [0, 2\pi)$.



Ha r és θ adottak, akkor

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta).$$

A hozzárendelés egy-egyértelmű, kivéve a $(0, 0)$-t.