Fourier sor

2. rész

2021. február 17.

Fourier sor. Ismétlés

Definíció. Legyen f 2π szerint *periodikus* függvény, mely integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény FOURIER SORÁT így értelmezzük:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad \text{ahol}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Deriváltfüggvény Fourier sora. Ismétlés

Tétel. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus.

Tfh. a $[-\pi, \pi]$ intervallumon f *véges sok pont* kivételével folytonos, és a szakadási pontok *elsőfajú szakadások*.

$$f \text{ Fourier sora:} \quad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

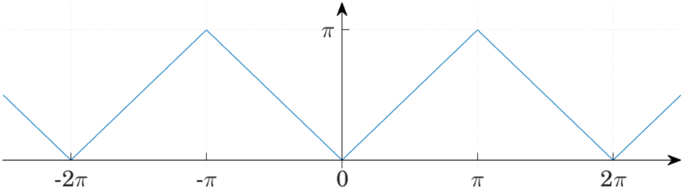
Tfh f véges sok pont kivételével differenciálható.

Ekkor az f' függvény Fourier sora:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

$g(x) = |x|$ Fourier sora

Példa. Legyen $g(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikus.



Mivel g páros, ezért $b_k = 0$. (Tehát $\sin(kx)$ együtthatója 0, $\forall k$.)

$g(x) = |x|$ Fourier sora

$b_k = 0$ minden k-ra. A többi együttható:

$$(g(x) = x,\ \ x \in [0, \pi]) \quad \Longrightarrow \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi.$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx =$$

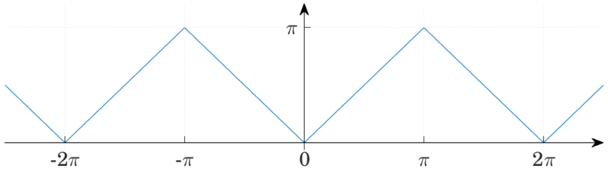
$$= 0 - \frac{2}{\pi k}\left[\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2n > 0, \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & \text{ha} \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

$g(x) = |x|$ Fourier sora

$$a_0 = \pi, \qquad a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k = 2n > 0, \\ -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{k^2} & \text{ha} \quad k = 2n+1. \end{cases}.$$

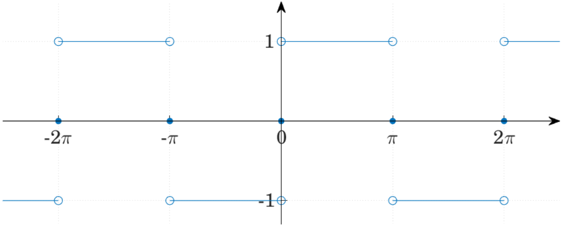
Így g Fourier sora:

$$g \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$



Előjel függvény és Fourier sora *Ismétlés.*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0, \ \pm\pi, \\ -1, & \text{ha} \quad -\pi < x < 0, \end{cases} \qquad f(x) = f(x+2\pi) \text{ egyébként.}$$

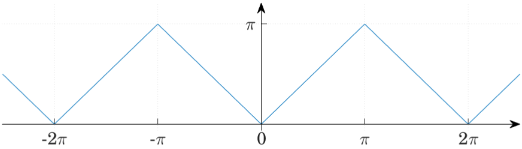


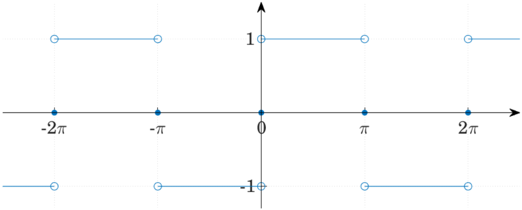
f Fourier sora:

$$f \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right).$$

Hasonlítsuk össze:

$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, és $g(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikusak.





Mi a kapcsolat?

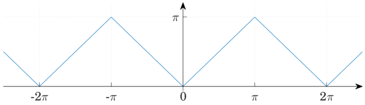
$f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ és $g(x) = |x|$ Fourier sora

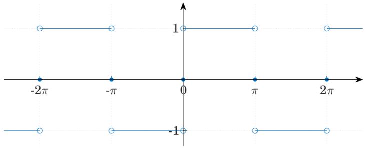
Mivel $x \neq k\pi$ esetén $f(x) = g'(x)$, ezért g Fourier sorát megkaphatjuk tagonkénti deriválással:

A Fourier sorok:

$$g \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

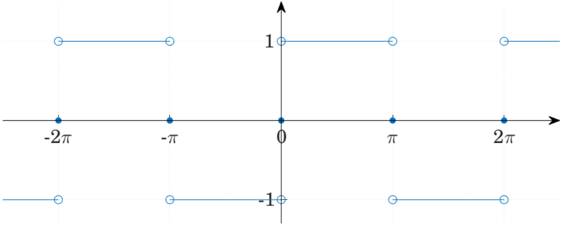
$$f \ \sim \ \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin(2k-1)}{2k-1} + \dots\right).$$

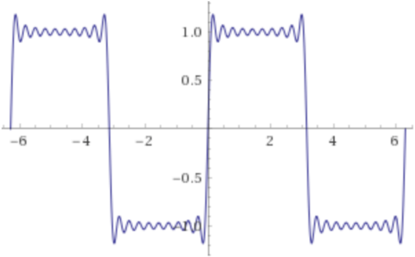




Fourier sor konvergenciája

Előjel függvény és Fourier polinomja $n = 10$ taggal.





A függvény és Fourier sora

Milyen feltételek mellett teljesül, hogy az f függvény előáll

Fourier sora összegeként?

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Egyenletesen konvergens Fourier sor esetén ez igaz. $\surd$

Ennél jóval kevesebb is elég lesz, erről szól a következő tétel.

Fourier sorok alaptétele

Tétel. f 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben

1. szakaszonként folytonosan differenciálható,
2. csak véges sok első fajú szakadási helye van,
3. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

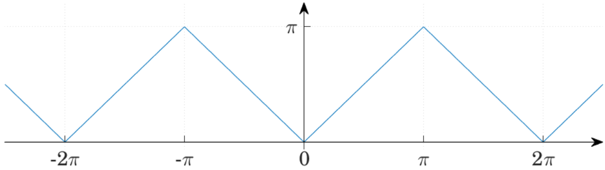
Ekkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

Alkalmazás. $f(x) = |x|$ Fourier sora

Példa. Legyen $f(x) = |x|$, ha $x \in [-\pi, \pi]$, egyébként 2π szerint periodikus.



$$f \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right).$$

(Ezt már láttuk.)

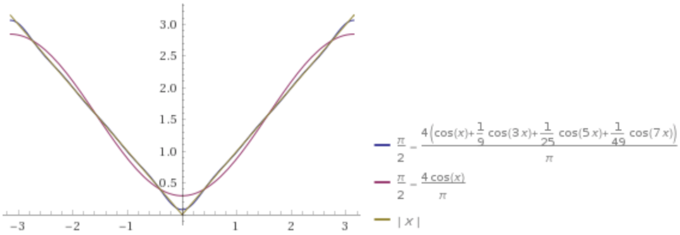
$f(x) = |x|$ Fourier sora

f eleget tesz a Fourier sorok alaptétele feltételeinek:

$[-\pi, \pi]$-ben szakaszonként folytonosan differenciálható$\surd$

és nincs szakadási helye $\surd$ Ezért:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right), \quad \forall x \in [-\pi,\ \pi].$$



$f(x) = |x|$ Fourier sora

Tehát $\forall x \in [-\pi,\ \pi]$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots\right).$$

Speciálisan, legyen $x = 0$.

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right),$$

azaz átrendezve

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Mit kapunk az $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ sorfejtéséből $x = \frac{\pi}{2}$ helyen?

Fourier sor konvergencia-sebessége

Fourier sorok alaptétele (ismétles)

Tétel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus fv, mely $[-\pi, \pi]$-ben

- szakaszonként folytonosan differenciálható,
- max véges sok első fajú szakadási helye van,
- az x_0 szakadási pontban: $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx.$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Mit mondhatunk a fenti végtelen sor konvergecia-sebességéről?

Lemma. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2).$$

BIZONYITAS. Végezzük el a a négyzetreemelést:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))\right)^2 dx = \\
= \; & \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{a_0^2}{4}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dx + \\
+ \; & \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)dx + b_k^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)dx\right) - \\
- \; & 2\frac{a_0}{2}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx - \\
- \; & 2\sum_{k=1}^{n} b_k\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx + 0 =
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right) - a_0a_0 - 2\sum_{k=1}^{n}\left(a_ka_k+b_kb_k\right).
$$

Együtthatók nagyságrendje, folytatás

A "hosszú" számolással beláttuk, hogy

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\dots)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \geq 0.$$

Ezzel beláttuk:

Tétel. (*Bessel egyenlőtlenség*)

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Következmény. A Bessel egyenlőtlenség $n \to \infty$ esetén is igaz:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

A *Bessel egynlőtlenség*nél több is igazolható:

Tétel. *Parseval egyenlőség* A Fourier együtthatókra teljesül az alábbi egyenlőség:

$$\boxed{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.}$$

"*Energia megmaradás*" jellegű állítás.

Vajon miért?

Egyenletes konvergencia?

Általában *nem igaz* a Fourier sorok egyenletes konvergenciája.

A következő tétel alapján lehet olyan trigonometrikus sort konstruálni, mely egyenletesen konvergens.

Tétel. *(Fejér tétele)*

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos és 2π szerint periodikus. Jelölje s_n az f fv n-edik *Fourier polinom*ját. Képezzük ezek számtani átlagát:

$$T_n(x) := \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x)}{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)$, és ez a konvergencia *egyenletes.*