Fourier sor

2021. február 15.

Függvénysor, ismétlés

Taylor sor: *Speciális függvénysor*, melynek tagjai:

$$f_n(x) = cx^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Állítás. "Bizonyos feltételekkel minden f előállítható":

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Hasonló állítást adunk, ha a függvénysor tagjai

$$a\cos(mx), \qquad b\sin(nx), \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

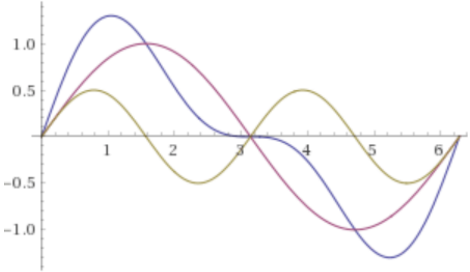
Trigonometrikus polinomok

Definíció.

Az f függvény n-ed fokú TRIGONOMETRIKUS POLINOM, ha:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \;\; a_k, \;\; b_k \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}$$

Példa.
$f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin(2x)$
gráfja.



Trigonometrikus sor

Definíció.

TRIGONOMETRIKUS SORnak az alábbi végtelen sort nevezzük:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ahol (a_k) és (b_k) valós együtthatók.

Speciális függvénysor, melyben az összeadandó függvények:

$$a_k \cos(kx) \quad \text{és} \quad b_k \sin(kx), \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

Trigonometrikus sor összege

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Milyen függvény állítható elő trigonometrikus sor segítségével?

A végtelen összeg minden tagja

2π szerint periodikus és folytonos.

$\Longrightarrow$ az összegfüggvény 2π szerint periodikus lesz.

$\not\Longrightarrow$ az összegfüggvény folytonos.

A trigonometrikus függvényrendszer

Definiáljuk az alábbi alapfüggvényeket:

$$\phi_0(x) = 1,$$

$$\phi_1(x) = \sin(x), \qquad \phi_2(x) = \cos(x),$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\phi_{2k-1}(x) = \sin(kx), \qquad \phi_{2k}(x) = \cos(kx),$$

$$\vdots$$

A trigonometrikus függvényrendszer

Lemma. *(ortogonalitás)* Tetszőleges $n \neq m$ mellett

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0.$$

Háttér: Adott a $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ függvénytér

$$\mathcal{C}([-\pi,\pi]) := \{f : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R} \text{ folytonos}\}.$$

Ebben a vektortérben a skalárszorzat:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx. \qquad \langle a, b\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Lemma. "$\langle \phi_n, \phi_m\rangle = 0$, ha $n \neq m$."

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(x)\phi_m(x)dx = 0,\ n \neq m.$$

BIZ. Ha $n = 0$, vagy $m = 0$, akkor

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_j(x)dx = 0, \qquad \forall j > 0.$$

Egyébként trigonometrikus azonosságokat használunk:

$$\begin{aligned}
cos(nx)\cos(mx) &= \frac{\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)}{2}, \\
\cos(nx)\sin(mx) &= \frac{\sin((n+m)x) + \sin((m-n)x)}{2}, \\
\sin(nx)\sin(mx) &= \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2}.
\end{aligned}$$

A trigonometrikus függvényrendszer

Az alapfüggvények "hossza":

Lemma. Tetszőleges n mellett

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{ha } n = 0, \\ \pi, & \text{ha } n \neq 0. \end{cases}$$

Megjegyzés. $[-\pi, \pi]$ helyett bármelyik 2π hosszú intervallumot választhatnánk.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n^2(x)dx = ?$$

BIZ. $n = 0$ esetén az azonosan 1 függvényt integráljuk. $\surd$

$n \geq 1$ esetén

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx,$$

másrészt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos^2(nx) + \sin^2(nx)\right) dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1dx = 2\pi.$$

Ezért

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)dx = \pi.$$

A trigonometrikus sor összege

Tétel. Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

egyenletes konvergenciával. Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \qquad k = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Megjegyzés. $[-\pi, \pi]$ helyett bármelyik 2π hosszú intervallumot választhatnánk.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \ x \in [-\pi, \pi].$$

Szorozzuk meg az egyenletet $\cos(mx)$-el, ahol $m \geq 1$, majd integráljunk a $[-\pi,\ \pi]$ intervallumon:

Bal oldal: $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$. Jobb oldal:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2}\cos(mx) + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right\} \cos(mx) \right) dx =$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(mx)dx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(mx)dx = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)dx = a_m\pi.$$

A trigonometrikus sor összege, bizonyítás

Tehát:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \; \ldots a_m \pi.$$

Az integrálás és a végtelen összegzés sorrendjét felcseréltük!

Hasonlóan igazolhatóak az a_0-ra, illetve b_k, $k \geq 1$-re vonatkozó képletek.

Megjegyzés. Az *egyenletes konvergencia* nagyon erős feltétel.

Fourier sorok

A trigonometrikus sor összege. Újra

Tétel. Tegyük fel, hogy

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)), \qquad x \in [-\pi, \pi].$$

egyenletesen konvergenciával. Ekkor

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Fourier együtthatók

Definíció. Legyen f 2π szerint *periodikus* függvény, mely

integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény Fourier együtthatói:

$$a_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Vajon miért így definiáljuk?

Fourier sor

Definíció. Legyen f 2π szerint *periodikus* függvény, mely *integrálható* $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény FOURIER SORÁT így értelmezzük:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad \text{ahol}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

a fent definiált Fourier együtthatók. (**Formális** definíció!)

Megjegyzés. f értékei véges sok pontban módosíthatók.

Fourier polinom

Definíció. A Fourier sor közelítése az **n**-DIK FOURIER POLINOM:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

a korábban definiált együtthatókkal.

Fourier sor, példa

1. *Példa.* Tegyük fel, hogy f páros függvény. Ekkor f Fourier sorában

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0,$$

így

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Továbbá a párosság miatt

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx.$$

Következmény. Ha f páros függvény, akkor Fourier sora is páros.

Fourier sor, példa

2. *Példa.* Hasonlóképp, ha f páratlan, akkor Fourier sorában

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall a_k = 0,$$

ezért:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

$$\text{ahol} \qquad b_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx.$$

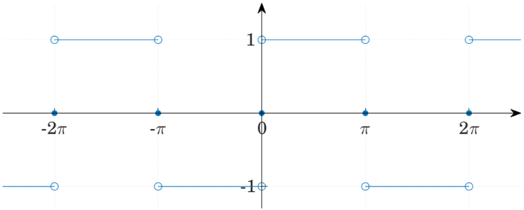
Következmény. Ha f páratlan függvény, akkor Fourier sora is páratlan.

Előjel függvény

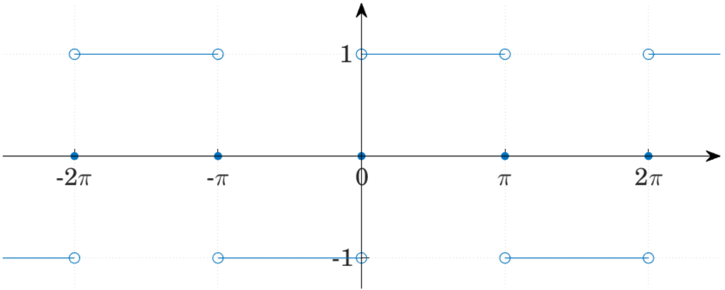
3. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{ha} \quad x = 0,\ \pi,\ -\pi, \\ -1, & \text{ha} \quad -\pi < x < 0, \end{cases}$$

és $f(x) = f(x + 2\pi)$ egyébként.



Előjel függvény Fourier együtthatói



f páratlan függvény. $a_k = 0$.

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi}$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k \quad \Longrightarrow \quad b_k = \frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)$$

Előjel függvény Fourier sora

$$b_k = \frac{2}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Ezért

$$b_{2k} = 0, \qquad b_{2k-1} = \frac{4}{\pi}\ \frac{1}{2k-1}.$$

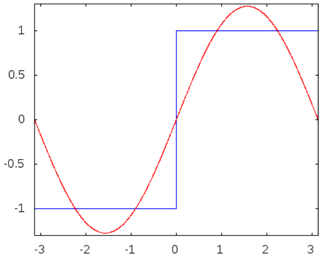
Így f Fourier sora:

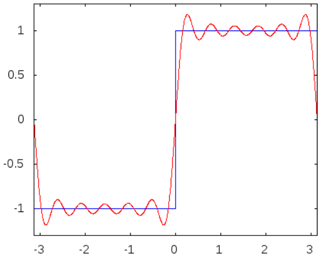
$$f \ \sim\ \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}.$$

Előjel függvény Fourier polinomjai $[-\pi, \pi]$-ben

Bemutatjuk az első két Fourier polinomot.

$$\frac{4}{\pi}\sin(x) \qquad \text{és} \qquad \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}\right)$$

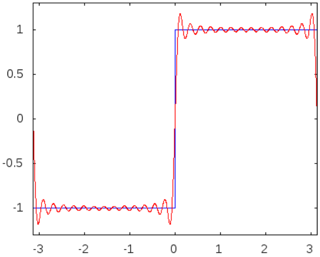


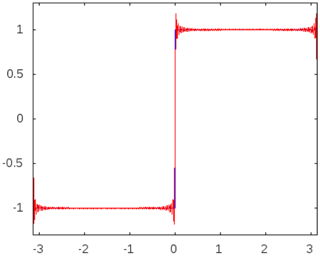


Az előjel függvény Fourier polinomjai.

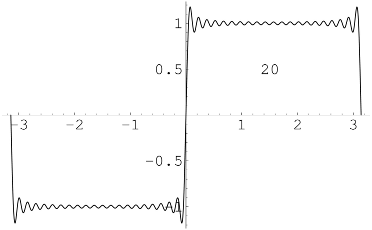
Előjel függvény Fourier polinomjai

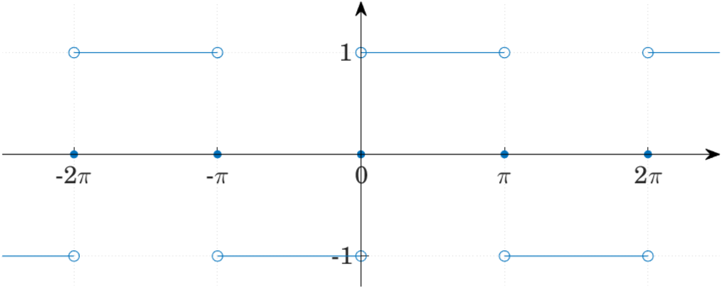
Az egységugrás függvény Fourier polinomjai, $n = 3$ és $n = 4$ esetén.





Előjel függvény Fourier polinomja $n = 20$ taggal.





$\Longrightarrow$ "hasonlítanak".

Deriváltfüggvény Fourier sora

Tétel. Tfh az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus, és differenciálható.

Ekkor az f' függvény Fourier sora:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$

Tehát f' Fourier sora tagonkénti deriválással számítható.

Deriváltfüggvény Fourier sora

BIZ. f' Fourier együtthatóit jelölje α_k és β_k.

Ekkor f' Fourier sora (def. szerint):

$$f' \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)),$$

ahol a definíciót felhasználva:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos(kx) dx, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin(kx) dx.$$

f' Fourier együtthatói

Parciálisan integrálunk.

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(kx)dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big[f(x)\cos(kx)\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = 0 + kb_k.$$

$\beta_k = -ka_k$-ra a számolás hasonló. Összefoglalva

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty}(b_k k\cos(kx) - a_k k\sin(kx)).$$

Deriváltfüggvény Fourier sora, általános eset.

Tétel. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény 2π szerint periodikus.

Tfh. a $[-\pi, \pi]$ intervallumon f *véges sok pont* kivételével folytonos, és a szakadási pontok *elsőfajú szakadások*.

Tfh. véges sok pont kivételével differenciálható.

Ekkor az f' függvény Fourier sora:

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k k \sin(kx) + b_k k \cos(kx)).$$