Hatványsor 2. rész.

2021. február 10.

Ismétlés:

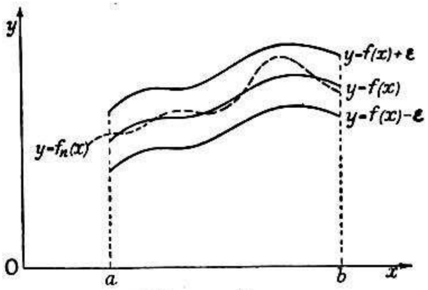
Függvénysor összegfüggvény tulajdonságai

Egyenletes konvergencia, ismétlés

Definíció. (f_n) egyenletesen konvergál az f-hez,

ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$-re

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in D$$



Definíció. A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ FÜGGVÉNYSOR konvergenciája EGYENLETES,

$$\text{ha} \qquad F_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to f(x) \quad \text{egyenletesen.}$$

Tétel. (elégséges feltétel)

Tfh. a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor tagjai *korlátosak*, éspedig f_n korlátja

$$|f_n(x)| < a_n, \qquad \forall x \in D.$$

Tfh továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Ekkor $\left(\sum f_n\right)$ *egyenletesen* konvergens.

Ismétlés. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ tulajdonságai

Tétel. Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ egyenletesen. Ekkor

1. Ha $\forall f_n$ folytonos x_0-ban, akkor ott f is folytonos.
2. Ha $\forall f_n$ integrálható $[\alpha, \beta] \subset D$-ben, akkor

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\alpha^\beta f_n(x)dx.$$

3. Ha $\forall f_n$ diff-ható és $(\sum f_n')$ is egyenletesen konvergens, akkor

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x).$$

Hatványsor: speciális függvénysor

Hatványsor: "Végtelen fokú" polinom

Definíció. A hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n, \qquad \forall c_n \in \mathbb{R}.$$

A hatványsor *konvergencia halmaza* :

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n < \infty\}.$$

A hatványsor KONVERGENCIA SUGARA

$$\rho := \sup\{|x - x_0| : x \in \mathcal{H}\}.$$

Állítás. A következő három eset lehetséges:

- $\mathcal{H} = \{x_0\}$
- $\mathcal{H} = \mathbb{R}$

Egyenletes konvergencia

Állítás. A $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $\rho \in [0, \infty]$.

1. Ha $0 < r < \rho$, akkor a HS egyenletesen konv. $[-r, r]$-ben.

   BIZONYÍTÁS. Mivel $r < \rho$, ezért $r \in \mathcal{H}$.

   Ha $x \in [-r, r]$, akkor $|c_n x^n| \le |c_n| r^n$.

   A majoráló számsor konvergens.

1.+ Ha $[\alpha, \beta] \subset (-\rho, \rho)$, akkor a HS egyenletesen konvergens $[\alpha, \beta]$-ban.

Folytonosság és derivált

Állítás.

2. A hatványsor összege $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ folytonos $\mathcal{H}$ belsejében.

Biz. Ha $x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{H}$, akkor $\exists r < \rho$: $x_0 \in [-r, r]$. Egyenletes $\surd$

3. Tagonként deriválva: $F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$. Ekkor f és F konvergencia sugara ugyanaz.

Biz. F konvergencia sugarának "reciproka":

$$\gamma_F = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)c_{n+1}|}{|nc_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \gamma \surd$$

Állítás. (folytatás)

4. A HS $\forall x \in \mathrm{int}\mathcal{H}$ pontban tagonként deriválható és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

4. $+$ Sőt, a hatványsor k-dik deriváltja:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)c_n\, x^{n-k}.$$

5. Ha $[\alpha,\beta] \subset (-\rho,\rho)$, akkor $f \in \mathcal{R}[\alpha,\beta]$, és

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}\bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

Biz. A sor is, és deriváltja is egyenletesen konvergens a belső pontokban.

Példa

Legyen $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Zárt alak?

A konvergencia sugár "reciproka" $\gamma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Így $\rho = 1$. A konvergencia tartomány $(-1, 1)$.

$$\textit{Trükk:} \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\implies \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Példa. $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. Zárt alak?

Láttuk, hogy a konvergencia tartomány $[-1, 1)$.

Tudjuk, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, ha $|x| < 1$.

Az n. tag egy primitív függvénye: $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Az egész sor egyik primitív függvénye:

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = f(x).$$

Ezért $f(x) = \int \frac{1}{1-x} \, dx = -\ln(1-x) + c$ valamilyen c mellett.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) + c$$

$x = 0$ behelyettesítéssel $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n} = -\ln(1-0) + c \implies c = 0.$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

Láttuk, hogy $\mathcal{H} = [-1, 1)$. Speciálisan, $x = -1 \in \mathcal{H}$, ezért :

$$-\ln(1-(-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \implies -\ln(2) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots .$$

A harmonikus sor összege: $\boxed{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdots = \ln(2)}$

Megjegyzés. Itt fel kellett használni *Abel tételét*(!)

Függvény előállítása hatványsor összegeként

Fordítva, új kérdés.

Adott $f(x)$ függvény *felírható-e* hatványsor összegeként?

Példa. $f(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$. Feírható? Igen:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad \Longrightarrow \quad c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ (-1)^k & n = 2k \end{cases}$$

A konvergencia sugár "reciproka" $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

Így $\rho = 1$. A konvergencia tartomány $(-1, 1)$.

Ezért f hatványsor előállítása csak ebben az intervallumban igaz.

Analitikus függvény

Definíció. Az f függvény AZ x_0 PONTBAN ANALITIKUS, ha

x_0-nak $\exists (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ környezete, melyben

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

Az f fv A D TARTOMÁNYBAN ANALITIKUS, ha $\forall x_0 \in D$-ben analitikus.

Példa. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, ha $x \neq 1$.

Ekkor tudjuk, hogy $x_0 = 0$-ban analitikus, hiszen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x << 1.$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$x_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1 < x << 1.$$

Vajon $x_0 = 3$-ban analitikus-e?

Másképp fogalmazva, $f(x)$ előállítható-e alakban:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (x-3)^n$$

valamely $(3-\rho, 3+\rho)$ intervallumban?

Tipp?

$$f(x) = \frac{1}{1-x},\ x_0 = 3.$$

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)-2} = \frac{-1}{2-(3-x)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{(\frac{3-x}{2})}_{q}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-q} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} q^n = -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{3-x}{2})^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}}_{c_n}\cdot(x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-3)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\,,\ x_0 = 3.$$

Azt kaptuk, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-3)^n, \qquad c_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{2^{n+1}}.$$

A hatványsor konvergencia sugarának "reciproka"

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \rho = 2.$$

A konvergenciahalmaz $(3-\rho, 3+\rho) = (1,\ 5)$.

Hasonlóan igazolható, hogy$\forall x \neq 1$ esetén f analitikus.

Állítás.

Ha f hatványsor összegeként reprezentálható, akkor ez egyértelmű.

BIZ. Tegyük fel, hogy van két előállítás:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Legyen $\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n = 0$.

Mivel $0 \in \mathcal{H}$, ezért $\varphi(0) = 0 = a_0 - b_0$. Ezért $a_0 = b_0$.

A konvergencia tartomány belsejében

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - b_n) x^{n-1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(0) = a_1 - b_1 = 0$$

Hasonlóan, $\varphi^{(n)}(0) = n!(a_n - b_n) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

Hatványsor előállítás

Általában, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

az x_0 valamely környezetében, akkor

$$f(x_0) = c_0.$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}, \text{ezért } f'(x_0) = c_1 \cdot 1$$

stb ... $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$

A hatványsor együtthatói: $\boxed{c_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.}$

Ez a *Taylor sor*.