Komplex függvénytan. 2. rész

2021. május 12.

Exponenciális függvény $\mathbb{C}$-ben

$f(z) = e^z$ függvény komplex számokra így értelmezhető:

$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y}_{u(x,y)} + i\, \underbrace{e^x \sin y}_{v(x,y)}.$$

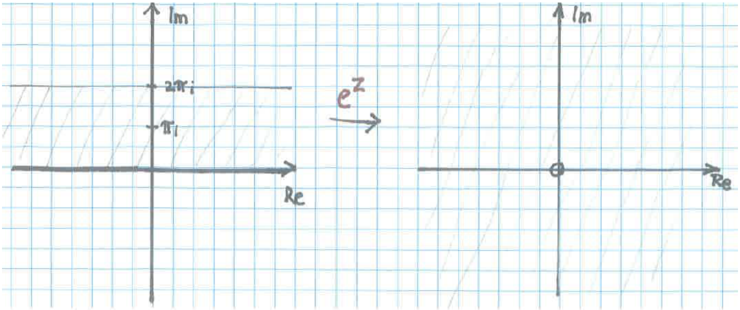
Állítás. Az $f(z) = e^z$ függvény néhány alaptulajdonsága:

1. $D_f = \mathbb{C}$, $R_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (U.i. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z} > 0$)
2. Analitikus és $(e^z)' = e^z$. *(Már láttuk.)*
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ komplex számra $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$. **HF**
4. Az e^z függvény $2\pi i$ szerint *periodikus*, azaz $e^z = e^{z+2\pi i}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Bizonyítás. $e^{(x+iy)+2\pi i} = e^x \big(\underbrace{\cos(y + 2\pi)}_{\cos(y)} + i\, \underbrace{\sin(y + 2\pi)}_{\sin(y)}\big)$.

Az exponenciális függvény

Az $f(z) = e^z$ függvény ”gráfja”:



végtelen sokszor

Logaritmus függvény. $f(z) = e^z$ inverze?

Adott $0 \neq w \in \mathbb{C}$. $\boxed{w = e^z}$ megoldása? z nem egyértelmű.

Tfh $w \neq 0$ trig. alakja $w = re^{i\theta}$, $z = \ln(w) = x + iy =?$

$$\ln(re^{i\theta}) = \ln(r) + i\theta \implies x = \ln r, \qquad y = \theta + 2k\pi$$

Definíció. A LOGARITMUS $\mathbb{C}$-ben sokértékű függvény:

$$\ln(w) = \ln|w| + i \cdot (\mathrm{arc}\,(w) + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

A $k = 0$-hoz tartozó érték a FŐÉRTÉK: $\mathrm{Ln}\,(w) = \ln|w| + i \cdot \mathrm{arc}\,(w)$.

Példa. $\ln(-1) =?$ Mivel $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} \Rightarrow \ln(-1) = \cancel{\ln(1)} + i(\pi + 2k\pi)$.

$\ln(i) =?$ Mivel $i = 1 \cdot e^{i\pi/2} \Rightarrow \ln(i) = \cancel{\ln(1)} + i(\pi/2 + 2k\pi)$.

Hatványozás. Egy klasszikus számolás.

Peirce *"misztikus formulája"* 1800+ évek. Kiindult az Euler-formulából

.

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

Speciálisan, $\theta = \pi/2$ esetén

$$e^{i\pi/2} = \underbrace{\cos(\pi/2)}_{0} + i\underbrace{\sin(\pi/2)}_{1} = i$$

Mindkét oldal *i-dik hatványát* véve:

$$i^i = \left(e^{i\pi/2}\right)^i = e^{-\pi/2} \ \ (!)$$

"Gentlemen, that is surely true, it is absolutely paradoxical ; we cannot understand it, and we don't know what it means . But we have proved it, and therefore we know it must be the truth."

Sőt, hasonló gondolatmenettel: $i^i = e^{-\pi/2} + 2k\pi$ sokértékű!

Komplex függvény integrálja (??)

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(z)dz$ van-e értelme? $\cancel{[\alpha, \beta]}$

Definíció. VONAL vagy KOMPLEX JORDAN GÖRBE

$$G = \{z(t) \in \mathbb{C} \;:\; t \in [\alpha, \beta]\}, \qquad [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R},$$

ahol $z(t) = x(t) + iy(t)$ vagy $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$

$G \subset \mathbb{C}$ sima Jordan-görbe, $f : G \to \mathbb{C}$ VONALINTEGRÁLJA:

$$\int_G f(z)dz := \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)dt.$$

Megjegyzés. A fenti képlet közelítő összegek határértéke:

$$\lim_{\substack{n\to\infty,\\ \delta_n\to 0}} \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) \cdot f(\xi_k) = \int\limits_G f(z)dz, \quad \delta_n = \max_k \left\{ s(\widehat{z_{k-1}, z_k}) \right\}$$

Ha a G görbe zárt, akkor ezt a jelölést használjuk: $\displaystyle\oint_G f(z)dz$.

Példák

1. *Példa.* $f(z) \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$ konstans függvény.

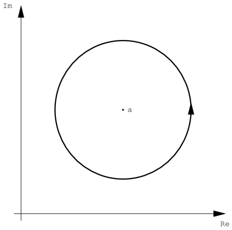
$$\int_G f(z)dz = \int_\alpha^\beta c\, z'(t)dt = c \cdot (z(\beta) - z(\alpha))$$

csak a végpontoktól függ az értéke. Ezért

$$\oint_G c\, dz = 0.$$

2. *Példa.* G az $a \in \mathbb{C}$ körüli 1 sugarú kör, és $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$

A körvonal $z(t) = a + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. $\Rightarrow z'(t) = ie^{it}$



$$\oint_G (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^n \cdot ie^{it} dt =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt.$$

Ha $n \neq -1$, akkor $\oint_G f(z)dz = i \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt = \ldots = 0.$

$$\oint_G (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{ha} \quad n = -1, \\ 0 & \text{ha} \quad n \neq -1. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{1}{z-a} dz = 1$$

Integrál kiszámítás

Tétel. (Newton-Leibniz formula) Tfh $\exists F : T \to \mathbb{C}$ analitikus fv, melyre $F'(z) = f(z)\ \forall z$. Ekkor ha $G \subset T$ sima Jordan görbe, végpontjai A, B:

$$\int_G f(z)dz = F(B) - F(A).$$

Következmény. Ha f-nek *van primitív függvénye*, akkor $\forall$ *zárt görbe* mentén

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Cauchy-féle alaptétel vonalintegrálra

Tétel. Legyen $T \subset \mathbb{C}$ *egyszeresen összefüggő* tartomány,

és $G \subset T$ sima, *zárt görbe*. Tfh $f : T \to \mathbb{C}$ *analitikus.* Ekkor

$$\oint_G f(z)dz = 0.$$

Tétel. (*Fordítva is igaz!*)Tfh $\forall G \subset T$ sima, *zárt görbe* mentén

$$\oint_G f(z)dz = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{Ekkor} \quad f : T \to \mathbb{C} \quad \text{analitikus.}$$

Következmény. Ha f *analitikus* T-n, *egyszeresen összefüggő*

akkor $\int_G f(z)dz$ csak a végpontoktól függ!

Cauchy-féle integrál formula

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus fv.

Legyen $z_0 \in \operatorname{int} T$.

$G \subset T$ zárt görbe, melynek belseje is T-ben van és körbeveszi z_0-t.

Ekkor

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

A fenti integrálban az integrálandó függvénynek $\left(\frac{f(z)}{z - z_0}, \quad z \in T \right)$, *$z_0$-ban szingularitása van.*

Speciális eset

Legyen G a z_0 körüli egységkör. Akkor G paraméteres felírása:

$$z(t) = z_0 + e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

Ekkor $dz(t) = ie^{it}dt$, ezért $z = z(t)$ helyettesítéssel:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + e^{it})}{e^{it}} ie^{it} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + e^{it}) dt, \end{aligned}$$

azaz *nem akármi a függvényérték!*

Cauchy-féle integrál formula függvény deriváltjára

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ egyszeresen összefüggő, $f : T \to \mathbb{C}$ analitikus fv.

Ekkor f akárhányszor differenciálható T-ben és minden $z_0 \in \operatorname{int} T$-re:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol a G olyan zárt görbe körbveszi z_0-t, és belseje is T-ben van.

Ha a deriválhatóságot már tudjuk, akkor z_0 szerint "deriválva"

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \qquad f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz,$$

+ teljes indukció.

Taylor-sorfejtés

Tétel. Tfh $f : T \to \mathbb{C}$ differenciálható z_0 egy környezetében.

Ekkor ott *Taylor sorba fejthető*, és

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_G \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

ahol $G \subset T$ olyan zárt görbe, amely z_0-t.

Zérus

Tfh f analitikus és $f(z_0) = 0$.

Ekkor a fv felírásából egy $z - z_0$ tényező kiemelhető, és ilyen alakban írható

$$f(z) = (z - z_0)\widetilde{f}(z),$$

ahol $\widetilde{f}$ analitikus.

Definíció. Ha

$$f(z) = (z - z_0)^n h(z), \qquad h(z_0) \neq 0$$

valamely $n \geq 1$ egész számra,

z_0 n-SZERES - VAGY n-ED RENDŰ- ZÉRUSA f-nek. ($n \geq 1$.)