Komplex függvénytan

2021. május 10.

Komplex számok. Összefoglalás.

A komplex számok halmaza $\mathbb{C}$.

Egy z komplex szám *kanonikus alakja*

$$z = x + iy, \quad x = \mathrm{Re}\,(z) \quad y = \mathrm{Im}\,(z), \quad i^2 = -1.$$

Egy komplex szám *konjugáltja* és *abszolút értéke*

$$\overline{z} = x - iy \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

A z komplex szám *trigonometrikus alakja*:

$$z = r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi}, \quad r = |z|.$$

Komplex számsorozatok

$(z_n) \subset \mathbb{C}$ számsorozat, akkor definiáljuk:

$$x_n = \mathrm{Re}\,(z_n), \qquad y_n = \mathrm{Im}\,(z_n), \qquad (x_n),\ (y_n) \subset \mathbb{R}.$$

Állítás.

1. (z_n) korlátos $\iff$ (x_n) és (y_n) is korlátosak.
2. (z_n) konvergens $\iff$ (x_n) és (y_n) is konvergensek.

   Ekkor

   $$\lim_{n\to\infty} z_n = z = x + iy,$$

   ahol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, és $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Példák

1. *Példa.* Legyen a sorozat $z_n = (1+i)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} z_1 &= 1+i, \qquad z_2 = (1+i)^2 = 1-1+2i = 2i, \\ z_3 &= (1+i)2i = -2+2i \ldots \end{aligned}$$

A tagok abszolút értékeiből álló sorozat:

$$|z_1| = \sqrt{2}, \qquad |z_2| = 2, \qquad |z_3| = \sqrt{8}, \ldots, \qquad |z_n| = 2^{\frac{n}{2}}.$$

Mivel $|z_n| \to \infty$, ezért a sorozat nem korlátos.

2. *Példa.* A sorozat n-dik tagja $z_n = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$. Ekkor

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = -1, \qquad z_3 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}) \ldots.$$

Minden n-re $|z_n| = 1$, tehát a sorozat korlátos.

Függvény megadása

$D \subset \mathbb{C}$. $f : D \to \mathbb{C}$ függvény $z = x + iy \mapsto w = f(z) = u + iv$.

A független változó $z = x + iy$, a függő változó $w = u + iv$.

1. *Példa.* $f(z) = z^2$. $D_f = \mathbb{C}$. Ekkor

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{u} + i\,\underbrace{(2xy)}_{v}.$$

2. *Példa.* $f(z) = \frac{1}{z}$. $D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor

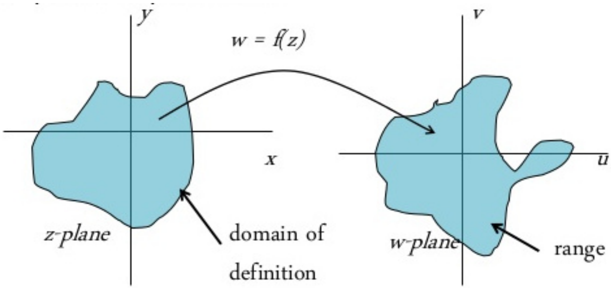
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}\frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Geometriai leírás

Négy dimenzió? - ez nem megy.

Így megelégszünk azzal, hogy *két* komplex számsíkot rajzolunk:

– az *egyiken az ÉT*-t, *a másikon az ÉK-t* ábrázoljuk.



HF. $f(z) = \frac{1}{z}$. Mi lesz a képe a $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ pontoknak?

Komplex függvény kanonikus alakja

$D \subset \mathbb{C}$ tartomány. Adott ezen egy hozzárendelés $f : D \to \mathbb{C}$:

$$z \mapsto f(z) = \mathrm{Re}\,(f(z)) + i\,\mathrm{Im}\,(f(z)).$$

Definíció. A függvény KANONIKUS ALAKJA két *valós kétváltozós* fv:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : \qquad u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z), \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z).$$

Példa. $f(z) = z^2$.Mivel

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

ezért ennek kanonikus alakja: $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$.

Kanonikus alak függvényei

Hasonlóképp, adott két kétváltozós valós függvény, $u(x, y)$ és $v(x, y)$.

Ekkor meghatározhatjuk azt az $f(z)$ komplex függvényt:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Példa. Legyenek $u(x, y) = -2xy$, és $v(x, y) = x^2 - y^2$. Ekkor

$$f(z) = -2xy + i(x^2 - y^2) = \ \ldots \quad (HF) \quad = iz^2.$$

Határérték

Definíció. Az f függvény HATÁRÉRTÉKE a z_0 pontban H, ha

1. z_0 torlódási pontja D_f-nek,
2. ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$,hogy ha $z \in D_f$ és $0 < |z - z_0| < \delta$ akkor $|f(z) - H| < \varepsilon$.

Tétel. Tfh f kanonikus alakja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Tfh. $z_0 = x_0 + iy_0$ egy torlódási pontja D_f-nek.

Ekkor <u>ekvivalens</u> állítások:

1. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = H = U + iV$
2. léteznek az alábbi határértékek:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = U \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = V.$$

Folytonosság

Definíció. Legyen $f : D \to \mathbb{C}$ komplex függvény és $z_0 \in D$.

f FOLYTONOS z_0-ban, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists\delta > 0$, hogy

ha $|z - z_0| < \delta$ és $z \in D$, akkor

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Tétel. $f(z) = u + iv$ pontosan akkor folytonos $z_0 = x_0 + iy_0$-ban,

ha u és v is folytonosak (x_0, y_0)-ban.

Differenciálhatóság

$T \subset \mathbb{C}$ komplex tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$ komplex függvény.

Definíció. $z_0 \in \mathrm{int}\, D_f$ belső pont. f DIFFERENCIÁLHATÓ z_0-ban,

ha létezik és véges az alábbi határérték:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Vajon most is ”ugyanaz”?

f kanonikus alakja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Tfh u és v folytonosan differenciálható függvények.

Elegendő-e f differenciálhatóságához?

Példa

Legyen $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$. Differenciálható -e $z_0 = 0$-ban?

A kanonikus alakban:

$$f(z) = x \quad \Longrightarrow \quad u(x, y) = x \quad v(x, y) = 0.$$

u és v ”szép” függvények.

A $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ határértéket két irányból számoljuk

1. Legyen $h = r + is$, és most $s = 0$, $r \to 0$. Ekkor $\lim_{r \to 0} \dfrac{r - 0}{r} = 1.$
2. Legyen $h = r + is$, és most $r = 0$, $s \to 0$. Ekkor $\lim_{s \to 0} \dfrac{0 - 0}{is} = 0.$

Mivel $1 \neq 0$, a különbségi hányadosnak NINCS HATÁRÉRTÉKE 0-BAN.

Az $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$ függvény NEM DIFFERENCIÁLHATÓ a $z = 0$ pontban.

Alaptétel komplex függvény differenciálhatóságáról.

Tétel. $T \subset \mathbb{C}$ tartomány, $f : T \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathrm{int}\, T$. Kanonikus alak: $f = u + iv$.

Tfh u és v *folytonosan differenciálható* függvények.

Ekkor az alábbi két állítás egymással ekvivalens:

1. f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban

2. Az u és v függvények kielégítik ezeket az összefüggéseket:

$$\begin{aligned} u'_x(x_0, y_0) &= v'_y(x_0, y_0) \\ u'_y(x_0, y_0) &= -v'_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Az utolsó két egyenlet a CAUCHY-RIEMANN EGYENLETEK.

Ha f diff-ható T-ben, akkor itt ANALITIKUS (vagy REGULÁRIS) .

Bizonyítás 1. rész. Tfh f differenciálható z_0-ban.

Az $f'(z_0)$-t definiáló határérték létezik. $h = r + is$. Most $s = 0$, $r \to 0$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{r\to 0} \frac{u(x_0+r,y_0)+iv(x_0+r,y_0)-u(x_0,y_0)-iv(x_0,y_0)}{r} = \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{u(x_0+r,y_0)-u(x_0,y_0)}{r} + i\lim_{r\to 0} \frac{v(x_0+r,y_0)-v(x_0,y_0)}{r} = \\ &= u'_x(x_0,y_0) + iv'_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Most tegyük fel, hogy $r = 0$ és $s \to 0$. Ekkor az előzőhöz hasonlóan

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{u(x_0,y_0+s)-u(x_0,y_0)}{is} + i\lim_{s\to 0} \frac{v(x_0,y_0+s)-v(x_0,y_0)}{is} = \\ &= -iu'_y(x_0,y_0) + v'_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Mivel a két határértéknek egyenlőnek kell lennie, így

$u'_x(x_0,y_0)+iv'_x(x_0,y_0) = -iu'_y(x_0,y_0)+v'_y(x_0,y_0)$ C-R egyenletek$\checkmark$.

Bizonyítás. 2. rész. Tfh Cauchy-Riemann egyenletek$\surd$.

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \\
= \quad &\frac{u(x_0+r, y_0+s)+iv(x_0+r, y_0+s)-u(x_0, y_0)-iv(x_0, y_0)}{r+is}.
\end{aligned}$$

Mivel u és v deriválhatók, ezért

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{u'_x r + u'_y s + iv'_x r + iv'_y s}{r+is} + \frac{\varepsilon_1(|h|)}{r+is} + \frac{\varepsilon_2(|h|)}{r+is} =$$

$$= u'_x + iv'_x + \frac{\varepsilon_1(|h|)}{r+is} + \frac{\varepsilon_2(|h|)}{r+is}.$$

Ezért

$$\exists \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0),$$

Következmény

Ha f differenciálható, akkor deriváltja kétféleképpen

számolható:

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y.$$

Sőt!

$$f'(z) = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x.$$

1. Példa

Legyen $f(z) = e^z$. Ekkor

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

ezért

$$u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y.$$

A megfelelő parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x(x,y) &= e^x \cos y, & u'_y(x,y) &= -e^x \sin y, \\ v'_x(x,y) &= e^x \sin y = -u'_y, & v'_y(x,y) &= e^x \cos y = u'_x. \end{aligned}$$

Tehát a függvény differenciálható, és

$$f'(z) = u'_x(x,y) + iv'_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = f(z).$$

2. Példa

Legyen $f(z) = \overline{z} = x - iy$.

Ennek kanonikus alakját felírva a parciális deriváltak

$$u'_x = 1, \qquad u'_y = 0,$$

$$v'_x = 0, \qquad v'_y = -1 \neq u'_x.$$

Tehát a függvény nem differenciálható.

Harmonikus függvények

Definíció. Legyen $u : R \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $R \subset \mathbb{R}^2$.

Tfh $u(x, y)$ kétszer differenciálható.

$u(x, y)$ HARMONIKUS az R tartományon, ha

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0 \qquad \forall (x, y) \in R.$$

Ehhez kapcsolódóan definiáljuk a LAPLACE-OPERÁTORT.

A Laplace operátor egy $u : R \to \mathbb{R}$ kétszer diff-ható függvényhez

egy másik $\triangle u$ kétváltozós függvényt rendel:

$$\triangle u := u''_{xx} + u''_{yy}.$$

Kapcsolat a komplex differenciálhatósággal

Állítás. Tfh az $f : T \to \mathbb{C}$ komplex függvény differenciálható.

Ekkor $f(z)$ kanonikus alakjában szereplő $u(x, y)$ és $v(x, y)$

harmonikusak.

Bizonyítás. A differenciálhatóság miatt

$$u'_x = v'_y \quad \text{és} \quad u'_y = -v'_x$$

Az első azonosságot x szerint, a másodikat y szerint deriváljuk,

$$\triangle u = v''_{xy} - v''_{yx} = 0.$$

Fordítva?

Állítás. Tfh u harmonikus T-ben, mely *egyszeresen összefüggő* .

Akkor létezik olyan $v : T \to \mathbb{R}$ harmonikus függvény,

hogy az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ komplex függvény differenciálható.

Azt mondjuk, hogy v az u függvény HARMONIKUS TÁRSA.

A harmonikus társ egyértelműségéről mit mondhatunk?

Exponenciális függvény $\mathbb{C}$-ben

$f(z) = e^z$ függvényt komplex számokra így értelmezhető:

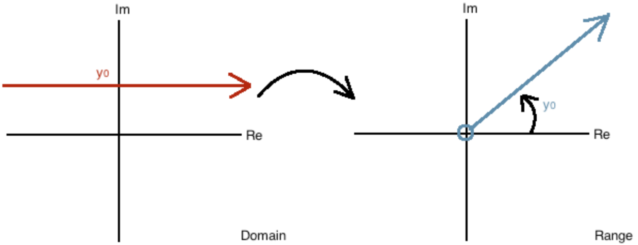
$$z = x + iy \quad \Longrightarrow \quad e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Ez valóban a valós $f(x) = e^x$ függvény kiterjesztése, és

$$|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\,(z)}, \qquad \mathrm{arc}\,(e^z) = y.$$

"Ábrázolás". Pl. az $\{\mathrm{Im}\, z = y_0\}$ egyenes képe:

$$\mathrm{Re}\, z = x,\ \mathrm{Im}\, z = y_0 \quad \Longrightarrow \quad e^z = e^x(\cos(y_0) + i\sin(y_0))$$



Exponenciális függvény $\mathbb{C}$-ben, folyt.

Példa. Hol teljesül az $|e^z| = 1$ egyenlőség?

Mivel $|e^z| = e^x = 1 \iff x = 0$, ezért az $f(z) = e^z$ függvény hatására az imaginárius tengely képe az egységkör.