Differenciálegyenletek. II. félév
2. rész

2021. május 5.

A homogén LDE megoldásai. Ism.

A HLDE általános alakja:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad a_k = a_k(x).$$

Tétel.

1.) Az $L[y] = 0$ egyenletnek van n darab lineárisan független megoldása, $y_1, \ldots, y_n$, ezek az ALAPMEGOLDÁSOK.

2.) Minden y megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként,

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n.$$

Következmény. A megoldások tere n dimenziós vektortér

Speciálisan: Állandó együtthatós homogén LDE

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Definíció. A DE-hez tartozó KARAKTERISZTIKUS POLINOM:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

$P(\lambda)$ egy valós együtthatós polinom, melynek $\mathbb{C}$-ben

n darab gyöke van, multiplicitásokkal együtt.

Állítás. Minden gyökhöz tartozik egy alapmegoldás.

$P(\lambda) = 0$ *valós gyökei.*

1.) Ha $P(\lambda)$ gyökei *valósak és egyszeresek*: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Ekkor a HLDE n db megoldása:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad \dots \quad y_n(x) = e^{\lambda_n x},$$

az általános megoldás:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}, \qquad c_k \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots n.$$

2.) Tfh $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ a $P(\lambda)$ polinom k-szoros valós gyöke.

Ekkor lineárisan független megoldások:

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \quad y_2(x) = x e^{\lambda_0 x} \quad \dots \quad y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}.$$

$P(\lambda) = 0$ *komplex gyökei*

1.) Tfh a $P(\lambda)$ polinom *egyszeres* *komplex gyökei* $\lambda = \alpha \pm i\beta$

Ekkor az alapmegoldások :

$$y_1(x) = = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

2.) Tfh $P(\lambda)$-nak *többszörös komplex gyökei* is vannak.

$\lambda = \alpha + i\beta$ és $\overline{\lambda}$ k-szoros gyökök, akkor a $2k$ alapmegoldás:

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \qquad y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_{2k-1}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x), \qquad y_{2k}(x) = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x).$$

3. példa

Legyen

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y^{(3)} - 4y'' + y' - 2y = 0.$$

$$\Rightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2.$$

A karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = i, \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = -i,$$

ezért az alapmegoldások:

$$y_1(x) = e^{2x}$$

$$y_2(x) = \sin(x) \quad y_3(x) = \cos(x) \quad y_4(x) = x\sin(x) \quad y_5(x) = x\cos(x).$$

4. példa. *Harmonikus rezgőmozgás egyenlete.*

$$y'' + k^2 y = 0, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 = ik, \qquad \lambda_2 = -ik$

$$\Longrightarrow \quad y_1(x) = \cos(kx) \qquad y_2(x) = \sin(kx).$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) = r \cos(kx + \alpha),$$

ahol $(c_1, c_2) \leftrightarrow (r, \alpha)$

Ebben a felírásban a paramétereknek fizikai jelentés adható:

r a rezgés amplitúdója, α a kezdőfázis, és k a frekvencia.

Inhomogén Lineáris DE

Lineáris differenciáloperátor: $L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_n y$.

INHOMOGÉN LDE: $L[y] = f$, ahol f adott függvény.

Állítás. (ism.)

2.) Ha y_1, y_2 megoldásai az *IHE*-nek $L[y_1] = f$, $L[y_2] = f$

akkor $y = y_1 - y_2$ a *homogén* egyenlet megoldása.

3.) Ha $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = f$, akkor $L[y_1 + y_2] = f$.

Tfh az $L[y] = 0$ HLDE alapmegoldásai: $y_1, \dots, y_n$.

$\Rightarrow$ HLDE általános megoldása: $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, $c_k \in \mathbb{R}$.

Állandók variálása módszer

Az IH *egyetlen* megoldását keressük:

$$y_p(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \cdots + \gamma_n(x)y_n(x), \quad \text{"} c_k \sim \gamma_k(x) \text{"}.$$

Állítás. Tfh az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned}
\gamma_1' y_1 + \cdots + \gamma_n' y_n &= 0 \\
\gamma_1' y_1' + \cdots + \gamma_n' y_n' &= 0 \\
&\vdots \\
\gamma_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + \gamma_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
\gamma_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + \gamma_n' y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}$$

Akkor $y_p := \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$ megoldás, azaz $L[y_p] = f$.

Állandók variálása módszer

Kompakt formában a feltételek:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \\ \vdots \\ \gamma_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Baloldalon: Wronski-mátrix. Megoldható.$\surd$

BIZONYÍTÁS. Legyen $y = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k$. Deriváltja

$$y' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k' = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k'.$$

Hasonlóan $j < n$ -re: $y^{(j)} = 0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(j)}$.

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k' y_k^{(n-1)} + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)} = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k y_k^{(n)}.$$

Behelyettesítve, $L[y] = \sum_{k=1}^{n} L[\gamma_k y_k]$:

$$L[y] = f + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k L[y_k] = f, \quad \text{u.i.} \quad L[y_k] = 0.$$

Speciálisan. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f$.

A HLDE alapmegoldásai: y_1, y_2.

Az IH partikuláris mo: $y_p = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$, $\gamma_1(x) = \ \gamma_2(x) = ?$

A feltételek:

$$\begin{aligned} \gamma_1' y_1 + \gamma_2' y_2 &= 0 \\ \gamma_1' y_1' + \gamma_2' y_2' &= f. \end{aligned}$$

Így a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Példa. Harmonikus rezgés.

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(x)}, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

1.) Homogén rész.

$$y'' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

$$\Longrightarrow \quad y_1 = \cos(x), \qquad y_2 = \sin(x).$$

Homogén általános mo. $y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.) IH rész. $y_p = \gamma_1 \cos(x) + \gamma_2 \sin(x)$. $\gamma_1 = ?\quad \gamma_2 = ?$

$$\begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \gamma_1'(x) \\ \gamma_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos(x)} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma_1'(x) &= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} && \Longrightarrow \quad \gamma_1(x) = \ln(\cos(x)) \\ \gamma_2'(x) &= 1 && \Longrightarrow \quad \gamma_2(x) = x. \end{aligned}$$

3.) Ált. mo. $y_{alt}(x) = \big(\ln(\cos(x)) + c_1\big)\cos(x) + (x + c_2)\sin(x).$

Próbafüggvények alkalmazása IH LDE megoldására

Állandó együtthatós IH LDE, melynek speciális a jobboldala, egyik partikuláris mo-a speciális alakú.

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = f(x), \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Néhány alapeset:

1. Ha $f(x) = Ke^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, akkor $y(x) = Ae^{\alpha x}$, $A =?$
2. Ha $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$, akkor $y(x) = A_m x^m + \cdots + A_0$ alakú, A_0, ... $A_m =?$
3. Ha $f(x) = K \sin(\alpha x)$ vagy $f(x) = K \cos(\alpha x)$, akkor $y(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x)$ alakú, $A =?$ és $B =?$
4. ...

Egyértelmű megoldás?

Definíció. KEZDETI ÉRTÉK PROBLÉMA esetén n-ed rendű

$L[y] = f$ ($f = 0$ is lehet) *egyetlen* megoldását keressük, melyre

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

ahol x_0 és $y_0, \ldots, y_{n-1}$ adott számok.

Definíció. PEREMÉRTÉK PROBLÉMA esetén

n-ed rendű $L[y] = f$ *egyetlen* megoldását keressük, melyre

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad \ldots y(x_{n-1}) = y_{n-1}.$$

Figyelem. Ez utóbbi feladatnak nincs mindig megoldása.

Példa

OLdjuk meg az alábbi kezdetiérték problémát.

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3.$$

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet $\lambda^2 + 1 = 0$.

Ennek gyökei $\lambda_{1,2} = \pm i \quad \Longrightarrow \quad$ *alapmo-k* $\cos(x)$ és $\sin(x)$.

Az általános megoldás, és annak deriváltja:

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \qquad y'(x) = -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x).$$

Ezért a kezdeti feltételek:

$$y(0) = c_1 = 2, \qquad y'(0) = c_2 = 3.$$

Tehát a kezdeti érték feladat megoldása:

$$y = 2\cos(x) + 3\sin(x).$$

Kétdimenziós differenciálegyenlet rendszer

Keresünk $y(x)$ és $z(x)$ fv-ket, melyek kielégítik a DER-t:

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= f(x, y(x), z(x)) && (1)\\
z'(x) &= g(x, y(x), z(x)), && (2)
\end{aligned}
$$

ahol f, $g : T \to \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^3$ típusúak.

Tétel. $(x_0, y_0, z_0) \in \operatorname{int} T$. Tfh az $f, g : T \to \mathbb{R}$ függvényekre

$$|f(x, y, z) - f(x, \overline{y}, \overline{z})| \leq M_1(|y - \overline{y}| + |z - \overline{z}|)$$

$$|g(x, y, z) - g(x, \overline{y}, \overline{z})| \leq M_2(|y - \overline{y}| + |z - \overline{z}|)$$

Ekkor $\forall y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$ mellett (1), (2) -nek $\exists!$ mo-a.

3-dimenziós DER. Példa

Ismerős? Legyen

$$y^{(3)} + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = \phi(x).$$

Rendeljük hozzá következő DER-t:

$$y_1(x) = y(x), \qquad y_2(x) = y'(x), \qquad y_3(x) = y''(x)$$

Az összefüggések:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= -a_1 y_3 - a_2 y_2 - a_3 y_1 + \phi. \end{aligned}$$

3 dim. lineáris, állandó eühatós homogén DER

Ált 3-dim lineáris DER:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 & \qquad y_1(0) = y_{01} \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 & \qquad y_2(0) = y_{02} \\ y_3' &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3, & \qquad y_3(0) = y_{03} \end{aligned} \;.$$

Kompakt alakhoz jelölések:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ y_3'(x) \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

A DER így írható

$$Y'(x) = AY(x), \qquad Y(0) = Y_0. \tag{3}$$

Példa, folytatás

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
y_3' &= -a_3 y_1 - a_2 y_2 - a_1 y_3 + \phi.
\end{aligned}
$$

Az együttható-mátrix

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_3 & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}.
$$

Definíció. Ez a DE KISÉRŐ MÁTRIXA (*companion matrix*).

$Y'(x) = AY(x),\ Y(0) = Y_0.$

Tétel. A lineáris DER megoldása: $Y(x) = e^{Ax} Y_0$.

Mit jelent az e^A mátrix?

Definíció. $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

Pl. ha A szimmetrikus, akkor $A = UDU^T$, ahol

$$U^T U = UU^T = I, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Ekkor $A^k = UDU^T \cdot UDU^T \cdots UDU^T = UD^k U^T$,

$$\Longrightarrow \quad e^A = Ue^D U^T, \quad \text{ahol} \quad e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

$Y'(x) = AY(x)$. HF elolvasni!

Tétel. Tfh A sajátértékei különbözőek: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

A megfelelő sajátvektorok s_1, s_2, s_3. ($s_j \perp s_i$).

Ekkor a DER lineárisan független megoldás-rendszere

$$Y_k = e^{\lambda_k x} s_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

$\forall Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^3$ kezdetiértékhez $\exists! Y$ megoldás, melyre:

$$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + c_3 Y_3, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. HF elolvasni!

1. $(Y_k = e^{\lambda_k x} s_k)$ lineárisan függetlenek, hiszen

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{és} \quad s_j \perp s_i$$

2. $Y_k = e^{\lambda_k x} s_k$ megoldás, u.i. $Y_k'(x) = \lambda_k e^{\lambda_k x} s_k$, és

$$AY_k(x) = Ae^{\lambda_k x} s_k = e^{\lambda_k x} A s_k = e^{\lambda_k x} \lambda_k s_k.$$

$$\Longrightarrow \quad Y_k'(x) = AY_k(x).$$

Megjegyzés. A Tétel. akkor is igaz, ha $\forall$ többszörös sajátértékhez lineárisan független sajátvektor-rendszer tartozik.