Differenciálegyenletek. II. félév

2021. május 2.

Differenciálegyenletek osztályozása.

(*Ism*) DE olyan **egyenlet**, melyben az ismeretlen egy függvény,

és az egyenletben szerepel(nek) az ismeretlen függvény deriváltja(i).

A differenciálegyenleteket (DE) osztályozhatjuk típusuk szerint:

1. KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET, **ODE.** $y = y(x) = ?$

   Pl. a rezgőmozgás DE : $y''(x) + y(x) = F(x).$

2. PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLET, **PDE.** $u = u(x, y, \dots) = ?$

   Pl. Laplace egyenlet a síkon. $u = u(x, y) = ?$

$$u''_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0.$$

$\longrightarrow$ Most csak ODE$\surd$

További osztályozás

- DE RENDJE n, ha az ismeretlen legmagasabb rendű deriváltja n.

- DE lehet IMPLICIT és EXPLICIT alakú:

  DE explicit, ha olyan $y = y(x)$ függvényt keresünk, melyre

  $$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

  A DE implicit, ha *nem explicit*. Pl. $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$.

Elsőrendű DE

Általános alak:

$$y' = f(x, y),$$

ahol $D \subset \mathbb{R}^2$, és $f : D \to \mathbb{R}$.

A DE MEGOLDÁSA:

1. $(a, b) \subset \mathbb{R}$ intervallum,
2. ezen $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény, melyre

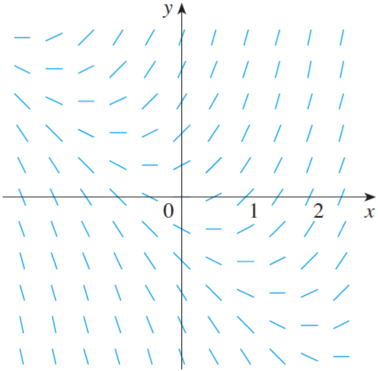
$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in (a, b)$$

Geometriai reprezentáció: $y' = f(x, y)$

Definíció. A DE-hez tartozó IRÁNYMEZŐ:

$\forall (x, y) \in D$-ben adott $f(x, y)$ iránytangensű pici szakasz.

Példa. $y' = x + y$ DE-hez tartozó iránymező:

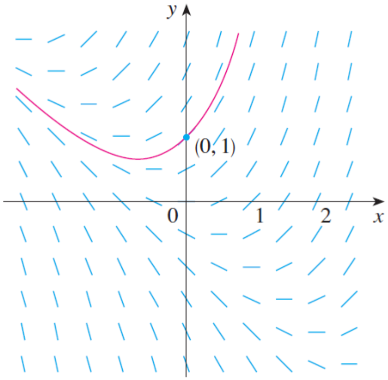


Geometriai reprezentáció, folytatás

A DE megoldása: Olyan görbét keresünk, melynek minden pontjában

érintő $\equiv$ kijelölt irány.

Ez az INTEGRÁLGÖRBE.



Ha adott (x_0, y_0) kezdőpont $\Rightarrow$ az ezen átmenő görbét keressük.

Picard tétel. (*Egzisztencia és unicitás*)

Tétel. Adott KEZDETI ÉRTÉK FELADAT, vagy CAUCHY-PROBLÉMA

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

ahol $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos, és $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} D$.

Tfh $\exists L > 0$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < L|y_1 - y_2| \qquad \forall (x, y_1),\ (x, y_2) \in D.$$

Ekkor **létezik** $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallum x_0 körül, és

$\exists y : I \to \mathbb{R}$ megoldás.

Ez a megoldás **egyértelmű**.

Lineáris differenciálegyenlet. Ism.

Példa. Lineáris Differenciál Egyenlet LDE:

$$y' = ay + b, \quad a = a(x),\ b = b(x)$$

Ha $b(x) \equiv 0$, akkor a DE HOMOGÉN. Ha $b(x) \neq 0$, akkor a DE *inhomogén*.

A homogén LDE általános megoldása:

$$y(x) = ce^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad A(x) = \int a(x)dx$$

Az IH egyenlet megoldását $y = u(x)e^{A(x)}$ alakban kerestük.

Az IH DE általános megoldása: $y(x) = \underbrace{e^{A(x)}\Big(c}_{} + \underbrace{\int b(x)e^{-A(x)}dx}_{}\Big)$

MAGASABB RENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

n-ed rendű Lineáris DE

$D \subset \mathbb{R}$. $\mathcal{C}^n(D)$: az n-szer folytonosan differenciálható fv-ek.

$L : \mathcal{C}^n(D) \to \mathcal{C}(D)$ egy olyan operátor, amely:

$$y \mapsto L[y] \quad L[y](x) := y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x),$$

ahol $a_1, \ldots, a_n$ adott folytonos függvények.

Az L operátor lineáris, azaz $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$

Kérdések:

1. A *homogén lineáris DE* (HLDE): $L[y] = 0$ megoldása?
2. *Inhomogén* LDE esetben az $L[y] = f(x)$ megoldása? ($f(x) \neq 0$.)

Lineáris DE megoldásai

Az L operátor lineáris $L[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L[y_1] + \beta L[y_2]$, ezért:

Állítás.

1.) Ha y_1, y_2 megoldásai a HDE-nek: $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$

akkor $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ is megoldása.

2.) Ha y_1, y_2 megoldásai az *IHE*-nek $L[y_1] = f$, $L[y_2] = f$

akkor $y = y_1 - y_2$ a *homogén* egyenlet megoldása.

3.) Ha $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = f$, akkor $L[y_1 + y_2] = f$.

A homogén LDE megoldásai

Az alábbi HLDE megoldásait fogjuk jellemezni.

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0,$$

ahol $a_k = a_k(x)$.

Következmény. A fenti HLDE megoldásai vektorteret alkotnak.

Vajon hány dimenziós? Hogy találunk benne bázist?

Lineárisan független függvények

Definíció. Adott $y_1, y_2, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$, közös ÉT $D \subset \mathbb{R}$.

Ezek LINEÁRISAN FÜGGETLENEK, ha

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = \ldots = c_n = 0.$$

1. *Példa.* $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x$, $\ldots$, $y_n(x) = x^{n-1}$, és $D = (a, b)$.

Tetszőleges lineáris kombinációjuk:

$$c_1 + c_2 x + \ldots c_n x^{n-1}$$

polinom. Ha egy polinom egy intervallumon eltűnik, akkor az 0.

További példák

2. *Példa.* $D = [0, 2\pi]$, és

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad \dots \quad y_n(x) = \sin(nx).$$

Trig. rendszer ortogonális $\implies$ lineárisan függetlenek.

3. *Példa.* $D = [0, 2\pi]$, és

$$y_1(x) = \sin^2(x), \quad y_2(x) = \cos(2x), \quad y_3(x) = \cos^2(x).$$

Lineárisan összefüggők. Miért?

4. *Példa.* $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. $I \subset \mathbb{R}$ intervallum.

$$y_1(x) = e^{a_1 x}, \quad y_2(x) = e^{a_2 x}, \quad \dots, \quad y_n(x) = e^{a_n x}$$

A rendszer *lineárisan független*. Teljes indukció n-re. HF$\surd$

Feltétel lineáris függetlenségre

Definíció. Tfh $y_1, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$, $(n-1)$-szer differenciálhatóak.

A WRONSKI DETERMINÁNS:

$$W[y_1, \ldots, y_n](x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

$W[y_1, \ldots, y_n] : D \to \mathbb{R}$ is egy *valós függvény*.

(Írják fel most a füzetbe.)

Lineárisan összefüggő fv-ek

Állítás. Tfh $y_1, \ldots, y_n : D \to \mathbb{R}$ **lineárisan összefüggőek** és $(n-1)$-szer differenciálhatók. Ekkor

$$W[y_1, \ldots, y_n] = 0.$$

BIZONYÍTÁS. Lineárisan összefüggőek $\Longrightarrow$

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n = 0, \quad \text{pl. } c_1 \neq 0$$

Ekkor: $y_1 = -\frac{c_2}{c_1} y_2 - \ldots - \frac{c_n}{c_1} y_n. \quad \Longrightarrow \quad y_1' = ...$ és $\quad y_1^{(k)} = \ldots$

A mátrix első oszlopa $\equiv$ többi lineáris kombinációja $\surd$

Lineáris függetlenség és Wronski determináns

Állítás. Ha $y_1, \ldots, y_n$ n-szer differenciálhatók D-ben, akkor

$$W[y_1, \ldots, y_n] = 0 \iff y_1, \ldots, y_n \text{ lineárisan összefüggőek}.$$

Példa. Elsőrendű HLDE

$$y'(x) + a(x)y(x) = 0.$$

Legyen ennek két megoldása y_1 és y_2. Ezek Wronski determinánsa:

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -a(x)y_1 & -a(x)y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

$\implies$ Lineárisan összefüggőek, $y_1 = cy_2$

Következmény. Az elsőrendű HLDE mo-a KONSTANS SZORZÓTÓL eltekintve egyértelmű.

A homogén LDE megoldásai

A HLDE megoldásait fogjuk jellemezni.

$$L[y] = y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0, \qquad a_k = a_k(x).$$

Tétel.

1.) Az $L[y] = 0$ egyenletnek van n darab lineárisan független megoldása, $y_1, \ldots, y_n$, ezek az ALAPMEGOLDÁSOK.

2.) Minden y megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként,

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n.$$

Következmény. A megoldások tere n dimenziós vektortér

ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓS HLDE

Állandó együtthatós homogén LDE

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Speciális megoldást keresünk, mely $y(x) = e^{\lambda x}$ alakú.

Ekkor:

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \ldots \quad y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Ezeket visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$L[y] = e^{\lambda x} \cdot (\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

A jobboldalon álló függvény csak úgy lehet 0, ha

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Állandó együtthatós homogén LDE

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} \cdot (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0.$$

Definíció. A DE-hez tartozó KARAKTERISZTIKUS POLINOM:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n.$$

$P(\lambda)$ egy valós együtthatós polinom, melynek $\mathbb{C}$-ben

n darab gyöke van, multiplicitásokkal együtt.

(*Írják fel a füzetbe.*)

$P(\lambda) = 0$. *Első eset.*

Tfh $P(\lambda)$ gyökei valósak és egyszeresek: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Ekkor fel tudjuk írni a homogén egyenlet *n* db megoldását

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x} \quad \dots \quad y_n(x) = e^{\lambda_n x},$$

ezek *lineárisan független* rendszert alkotnak.

Ekkor az általános megoldás:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}, \qquad c_k \in \mathbb{R},\ k = 1,\ \dots n.$$

1. példa

Tekintsünk egy harmadrendű DE-t:

$$y''' - 2y'' - 3y' = 0.$$

A differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda,$$

melynek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 3, \qquad \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = e^{3x}, \qquad y_3(x) = e^{-x},$$

és a DE általános megoldása

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{3x} + c_3 e^{-x}, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

$P(\lambda) = 0$. *Többszörös* valós gyökök

Tfh λ_0 a $P(\lambda)$ polinom k-szoros valós gyöke.

Definíció. Ekkor a rendszerben REZONANCIA van.

Legyenek:

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x} \quad y_2(x) = x e^{\lambda_0 x} \quad \dots \quad y_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}.$$

Ezek lineárisan függetlenek, és megoldásai a HLDE-nek.

HF: másodrendű LDE esetén ellenőrzés.

$\Longrightarrow$ a k-szoros λ_0 valós gyökhöz k db alapmo. tartozik.

2. példa

Legyen

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

A karakterisztikus polinom

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda,$$

ennek gyökei

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Így az alapmegoldások:

$$y_1(x) = 1, \qquad y_2(x) = e^{-x}, \qquad y_3(x) = xe^{-x},$$

és az általános megoldás

$$y(x) = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{-x}, \qquad c_k \in \mathbb{R}.$$

$P(\lambda) = 0$. *Komplex gyök*

Tfh a $P(\lambda)$ polinomnak *egyszeres* *komplex gyökei* (is) vannak.

Ekkor,

$$\text{ha } \lambda = \alpha + i\beta \quad \text{egy gyök, akkor} \quad \overline{\lambda} = \alpha - i\beta \text{ is gyök.}$$

A két *komplex* alapmegoldás: $u_1(x) = e^{\lambda x}$, $u_2(x) = e^{\overline{\lambda} x}$.

$$u_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\right),$$

$$u_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}\left(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)\right).$$

$P(\lambda) = 0$. *Komplex gyök* folyt.

$$u_1(x) = e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)\right),$$
$$u_2(x) = e^{\alpha x} \left(\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)\right).$$

Ezek minden lineáris kombinációja ismét megoldás.

$$y_1(x) = \frac{u_1(x) + u_2(x)}{2} = e^{\alpha x} \cos(\beta x),$$
$$y_2(x) = \frac{u_1(x) - u_2(x)}{2i} = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Ezek is lineárisan függetlenek, nyilvánvalóan, és valósak.