Taylor sor. Hatványsor.

2021. február 8.

Taylor sor adott pont körül

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény.

Tfh $x_0 \in (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható.

" Taylor sor = Taylor polinom határértéke"

Definíció.

Az f függvény x_0 pont körüli TAYLOR SORA:

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$x_0 = 0$ esetén szokás a Taylor sor helyett *McLaurent sor*ról beszélni.

Taylor sor konvergenciája

Állítás.

Legyen $f : (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$ végtelen sokszor diff-ható fv.

Tegyük fel, hogy az $f^{(k)}$ deriváltak egyenletesen korlátosak:

$$|f^{(k)}(x)| \leq K \qquad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ekkor $f(x) = T(x)$ teljesül $\forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ esetén.

Exponenciális és trigonometrikus függvények

Állítás. Az $f(x) = e^x$ függvény Taylor sora:

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R}.}$$

Bizonyítás. $f^{(n)}(x) = e^x$. Ezért $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n$.

Állítás. Az $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sora:

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{és} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}$$

Logaritmus függvény

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Állítás. Az $f(x) = \ln(x)$ függvény $x_0 = 1$ körüli Taylor sora

$$\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n.$$

Bizonyítás.

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ , \ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \dots , \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}$$

$$\implies \quad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Miért csak $n = 1$-től kezdünk a szummában?

Hatványsorok

Hatványsor: "Végtelen fokú" polinom

Legyen $P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $(c_n) \subset \mathbb{R}$.

Kicsit általánosabban:

Definíció. A hatványsor:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \qquad \forall c_n \in \mathbb{R}.}$$

Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltesszük, hogy $x_0 = 0$.

Konvergencia halmaz

Definíció. Adott egy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ hatványsor.

Ennek KONVERGENCIA HALMAZA (konvergencia tartománya):

$$\boxed{\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\}.}$$

Röviden: *"Ahol konvergens"*

Konvergencia halmaz, példák

1. *Példa.* $c_n = 1$ $\forall n$-re. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hol konvergens? $\mathcal{H} =?$ $(-1, 1)$

2. *Példa.* $c_n = \dfrac{1}{n!}$ $\forall n$-re. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ hol konvergens? $\mathcal{H} =?$ $\mathbb{R}$

3. *Példa.* $c_n = n^n$ $\forall n$-re. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ hol konvergens? $\mathcal{H} =?$ $\{0\}$

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\}.$$

Állítás. A konvergencia halmaz alaptulajdonságai:

1. $0 \in \mathcal{H}$.

   Bizonyítás. Trivi.

2. Ha $\xi \in \mathcal{H}$, akkor $\forall x$ melyre $|x| < |\xi|$, szintén $x \in \mathcal{H}$.

   Bizonyítás. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n < \infty \implies \exists K > 0$: $|c_n \xi^n| < K$
   Ha $q := |x/\xi|$, akkor $0 < q < 1$. Ezért

$$|c_n x^n| = |c_n \xi^n| \cdot \left|\frac{x^n}{\xi^n}\right| < Kq^n \qquad + \text{ majoránskritérium} \quad \surd$$

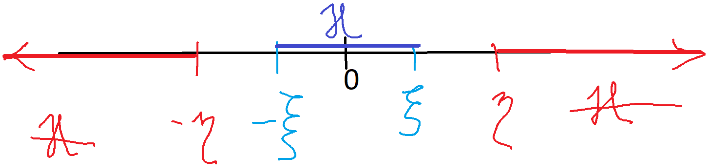
$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n < \infty\}.$$

Állítás. A konvergencia halmaz alaptulajdonságai (folyt):

3. Ha $\eta \notin \mathcal{H}$, akkor $\forall x$, melyre $|x| > |\eta|$, szintén $x \notin \mathcal{H}$.

Bizonyítás. ötlet?

Ha mégis $x \in \mathcal{H}$ lenne $\quad \Longrightarrow \quad \eta \in \mathcal{H}$ ↯



Konvergencia sugár

Definíció. Tegyük fel, hogy $\exists \xi \neq 0$, melyre $\xi \in \mathcal{H}$, és $\exists \eta \notin \mathcal{H}$

A hatványsor KONVERGENCIA SUGARA

$$\rho := \sup\{|x| : \ x \in \mathcal{H}\}, \qquad \rho > 0.$$

Megjegyzés. "rho" betű ρ vagy ϱ.

Definíció. *Kiegészítés.*

- Ha $\mathcal{H} = \{0\}$, akkor $\rho := 0$. (Azaz $\nexists \xi \neq 0$, $\xi \in \mathcal{H}$.)
- Ha $\mathcal{H} = \mathbb{R}$, akkor $\rho := \infty$. (Azaz $\nexists \eta \notin \mathcal{H}$)

Konvergencia halmaz

Következmény. A konvergencia halmaz intervallum.

A következő három eset lehetséges:

1. $\mathcal{H} = \{0\}$.
2. $\mathcal{H} = \mathbb{R}$.
3. $\mathcal{H} = [(-\rho, \rho)]$.

3. eset. A konvergencia halmaz: $\mathcal{H} = [(-\rho, \rho)]$.

Ez röviden azt jelenti, hogy ha $0 < \rho < \infty$, akkor

a konvergencia halmaz végpontjairól nem tudunk semmit.

Tehát a következő esetek bármelyike lehetséges:

$$\mathcal{H} = [-\rho, \rho] \qquad \mathcal{H} = (-\rho, \rho]$$

$$\mathcal{H} = [-\rho, \rho) \qquad \mathcal{H} = (-\rho, \rho)$$

Adjunk példát olyan hatványsorra, melynek konvergencia halmaza $\mathcal{H} = (-\rho, \rho]$ alakú,

Általános eset. $x_0 \in \mathbb{R}$

A hatványsor: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n}$, $(c_n) \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám.

Definíció. A hatványsor *konvergencia halmaza* :

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n < \infty\}.$$

A hatványsor KONVERGENCIA SUGARA

$$\rho := \sup\{|x - x_0| : \ x \in \mathcal{H}\}.$$

Állítás. A következő három eset lehetséges:

- $\mathcal{H} = \{x_0\}$
- $\mathcal{H} = \mathbb{R}$
- $\mathcal{H} = [(x_0 - \rho, x_0 + \rho)]$.

Példa. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

$x = 1$ esetén a hatványsor $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergens.

$$\Longrightarrow \quad \forall x, \quad |x| > 1 : \qquad x \notin \mathcal{H} \quad \text{RAJZ}$$

$x = -1$ esetén $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergens, mert *Leibniz típusú*.

$$\Longrightarrow \quad \forall x, \quad |x| < 1 : \qquad x \in \mathcal{H}. \quad \text{RAJZ}$$

Így a konvergencia halmaz egyértelműen: $\mathcal{H} = [-1,\ 1)$.

Ezért a konvergencia sugár $\rho = 1$. (Mázli...)

Konvergencia sugár meghatározása.

Ismétlés.

Gyengített gyökkritérium (hányadoskritérium) számsorokra.

Tfh a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor esetén

$$\exists A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad \left(\text{vagy} \quad \exists A = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right).$$

Akkor

- $A > 1$ esetén a sor divergens,
- és $A < 1$ esetén a sor (abszolút) konvergens.

$\exists A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$

Alkalmazzuk ezt a hatványsorra konkrét x esetén:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Longrightarrow \quad a_n = c_n x^n.$$

Ekkor $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x|$. Tfh $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} =: \gamma$.

Ekkor $A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \gamma \cdot |x|$, ezért ha $\gamma \neq 0$ akkor

- $|x| < 1/\gamma$ esetén a hatványsor konvergens,
- $|x| > 1/\gamma$ esetén a hatványsor divergens.

$$A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \gamma \cdot |x|$$

Következmény. Tfh $\exists$ az alábbi határérték: (esetleg 0 vagy $+\infty$)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}, \qquad \gamma = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Ekkor

- $\gamma = 0$ esetén $\rho = \infty$. A hatványsor mindenütt konvergens.
- $\gamma = \infty$ esetén $\rho = 0$. A hatványsor csak 0-ban konvergens.
- $0 < \gamma < \infty$ esetén a hatványsor konvergencia sugara:

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

Következmény. γ a konvergenciasugár "reciproka".

Fordítva, új kérdés.

Adott $f(x)$ függvény *felírható-e* hatványsor összegeként?

Példa. $f(x) := \dfrac{1}{1-x^2}$. Feírható? Igen:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \Longrightarrow \quad c_n = \begin{cases} 0 & n = 2k+1 \\ 1 & n = 2k \end{cases}$$

A konvergencia sugár "reciproka" $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$.

Így $\rho = 1$. A konvergencia tartomány $(-1, 1)$.

Ezért f hatványsor előállítása csak ebben az intervallumban igaz.

Hatványsor előállítás

Állítás. Ha $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ az $x_0 = 0$ valamely környezetében,

akkor

$$f^{(n)}(0) = c_n n!$$

Ezért a hatványsor előállításban

$$\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.}$$

Bizonyítás. (Vázlat egyelőre)

$$f(0) = c_0 \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} \implies f'(0) = c_1, \qquad \text{stb.}$$

Folytatjuk.

Hatványsor előállítás

Általában, ha

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

az x_0 valamely környezetében, akkor

$$f(x_0) = c_0.$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x - x_0)^{n-1}, \text{ ezért } f'(x_0) = c_1 \cdot 1$$

stb ... $f^{(n)}(x_0) = c_n n!$

A hatványsor együtthatói: $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.}$