Tartalomjegyzék

1. fejezet

Többváltozós valós függvények

1.1. $\mathbb{R}^2$ topológiája

1.1.1. Pontok és pontsorozatok $\mathbb{R}^2$-ben.

A sík pontjait rögzített koordináta-rendszerben megadott rendezett számpárokkal jellemezzük: $P = (x, y)$. Ezen pontok halmazát $\mathbb{R}^2$-vel jelöljük.

1.1.1. Definíció. *Legyen $P = (x, y)$ és $P' = (x', y')$ két pont $\mathbb{R}^2$-ben. Ezek távolsága:*

$$\overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Két pont távolságának jelölésére szokás még az alábbiakat is használni:

$$\rho(P, P'), \qquad \|P - P'\|.$$

Az origóból az (x, y) pontba mutató vektor hossza

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Használni fogjuk a lineáris algebrából ismert háromszög egyenlőtlenséget, miszerint

$$\|(x, y) + (x', y')\| \leq \|(x, y)\| + \|(x', y')\|.$$

1.1.2. Definíció. *Legyen adott a $C \epsilon \mathbb{R}^2$ pont, $C = (A, B)$, és az $\varepsilon > 0$ valós szám. A C pont körüli ε-sugarú gömböt így definiáljuk:*

$$S(C, \varepsilon) = \{P \epsilon \mathbb{R}^2 : \overline{PC} < \varepsilon\}.$$

Ezzel egy körlemezt kapunk C középponttal.

1.1.3. Definíció. *Pontsorozat alatt síkbeli pontok sorozatát értjük:*

$$P_n = (x_n, y_n), \qquad n = 1, 2 \ldots$$

1. *Példa.* Két pontsorozat: $P_n^{(1)} = (n, n^2)$, illetve $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$.

Megjegyzés: A sorozat tagjai nem feltétlenül különböznek.

1.1.4. Definíció. *A (P_n) sorozat korlátos, ha létezik egy olyan $S(C, \varepsilon)$ gömb, amely a sorozat minden elemét tartalmazza. Tehát ez azt jelenti, hogy (P_n) korlátos, ha létezik $C = (A, B)$ és $\varepsilon > 0$ hogy minden $P_n = (x_n, y_n)$-re teljesül, hogy*

$$\sqrt{(x_n - A)^2 + (y_n - B)^2} < \varepsilon.$$

1. *Példa.* (folyt.) $P_n^{(1)} = (n, n^2)$ nem korlátos; $P_n^{(2)} = ((-1)^n, 2)$ korlátos.

1.1.5. Definíció. *A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q, ha*

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n - Q\| = 0.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q.$$

Ezzel ekvivalens definíció:

1.1.6. Definíció. *A (P_n) sorozat konvergens és határértéke Q ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N(\varepsilon)$ esetén:*

$$\|P_n - Q\| < \varepsilon.$$

Másképp fogalmazva: Minden $\varepsilon > 0$ esetén az $S(Q, \varepsilon)$ gömbön kívül csak véges sok pont van (véges sok indexű).

Következmény. Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.

2. *Példa.* Legyen $P_n = (e^{-n/4}\cos(n), e^{-n/4}\sin(n))$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor

$$\|P_n - (0,0)\| = \|P_n\| = \sqrt{e^{-n/2}\cos^2(n) + e^{-n/2}\sin^2(n)} = \sqrt{e^{-n/2}} = e^{-n/4}.$$

Így

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (0, 0).$$

1.1.1. Állítás. *Tekintsük a $P_n = (x_n, y_n)$ elemekből álló sorozatot. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. *A (P_n) pontsorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = Q = (x, y).$$

2. *Az (x_n) és (y_n) számsorozatok konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. A pontsorozat konvergenciája miatt minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik egy $N(\varepsilon)$ index, hogy $\|P_n - Q\| < \varepsilon$, ha $n \geq N(\varepsilon)$. Mivel

$$|x_n - x| \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2},$$

ezért $|x_n - x| < \varepsilon$ és hasonlóan $|y_n - y| < \varepsilon$ is teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1. Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \qquad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ekkor $(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 < \varepsilon^2$, így

$$\|P_n - Q\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Cauchy-féle feltétel

1.1.7. Definíció. *A (P_n) sorozat teljesíti a Cauchy-féle feltételt, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre minden $n, m \geq N$ esetén*

$$\|P_n - P_m\| < \varepsilon.$$

1.1.2. Állítás. *A (P_n) pontsorozat pontosan akkor konvergens, ha teljesíti a Cauchy-féle feltételt.*

Bizonyítás. Csak az egyik irányt bizonyítjuk. Belátjuk, hogy ha a sorozat konvergens, akkor teljesíti a Cauchy-féle feltételt. A konvergencia miatt $\forall\varepsilon$-hoz létezik N küszöbindex, amelyre

$$\|P_n - P\| < \varepsilon/2$$

minden $n \geq N$ esetén. Ekkor ha $n, m \geq N$, akkor a háromszögegyenlőtlenséget felhasználva azt írhatjuk, hogy

$$\|P_n - P_m\| \leq \|P_n - P\| + \|P - P_m\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

1.1.1. Tétel. *(Bolzano-Weierstrass-tétel) Legyen (P_n) korlátos pontsorozat a síkon. Ekkor létezik konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Ha (P_n) korlátos és $P_n = (x_n, y_n)$, akkor (x_n) és (y_n) is korlátos sorozatok. Ekkor létezik (x_n)-nek konvergens részsorozata, legyen ez (x_{m_k}), illetve létezik (y_{m_k})-nak is konvergens részsorozata, ez legyen (y_{n_k}). Ekkor nyilván $((x_{n_k}, y_{n_k}))$ is konvergens.

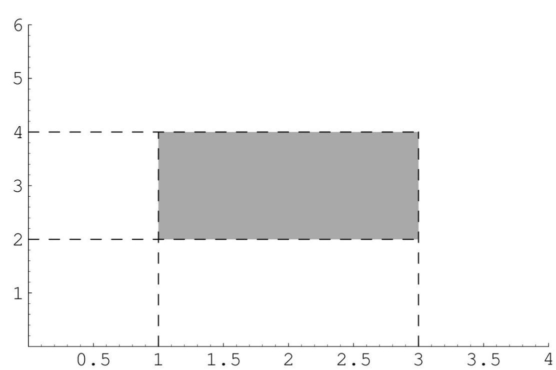
1.1.2. Halmazok $\mathbb{R}^2$-ben

$\mathbb{R}^2$ részhalmazait tartományoknak is nevezzük.

Példa. Téglalap. (Ez a kétdimenziós intervallum.) $T \subset \mathbb{R}^2$ TÉGLALAP, ha megadhatók $a < b$ és $c < d$ valós számok, melyre

$$T = \{(x, y) : \ a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

A kétdimenziós intervallumot direkt szorzat alakban is írhatjuk: $[a, b] \times [c, d]$.



1.1. ábra. Kétdimenziós intervallum

Példa. Gömb. (Ez kétdimenzióban egy körlemeznek felel meg.) Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám és $C = (A, B)\epsilon\mathbb{R}^2$ síkbeli pont. A C középpontú ε sugarú GÖMB:

$$S(C, \varepsilon) = \{(x, y) : \sqrt{(x - A)^2 + (y - B)^2} < \varepsilon\}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy egydimenzióban az a pont környezetei az a középpontú $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumok voltak, tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén. Ezt általánosítjuk.

1.1.8. Definíció. *Egy $P = (x, y)$ pont környezetei azon $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományok, melyek P közeppontú gömbök.*

Tekintsünk egy teszőleges $S \subset \mathbb{R}^2$ tartományt.

1.1.9. Definíció. *Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ halmaz.*

- *$Q\epsilon S$ belső pontja S-nek, ha Q-nak van olyan U környezete, melyre $U \subset S$.*
- *$Q\epsilon\mathbb{R}^2$ külső pontja S-nek, ha Q-nak van olyan U környezete, melyre $U \cap S = \emptyset$.*
- *$Q\epsilon\mathbb{R}^2$ határpontja S-nek, ha a Q pontnak minden U környezete rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy van olyan $P'\epsilon U$ pontja melyre $P'\epsilon S$ és van olyan $P''\epsilon U$ pontja melyre $P''\not\epsilon S$.*

1.1.1. Következmény. *Tetszőleges S halmaz esetén a síkot 3 diszjunkt részre oszthatjuk:*

- *külső pontok, ezek halmazát $\mathrm{ext}(S)$ jelöli. (Ez az 'exterior' szóból ered.)*
- *belső pontok, ezek halmazát $\mathrm{int}(S)$ jelöli. (Ez az 'interior' szóból ered.)*
- *határpontok, ezeket halmazát ∂S jelöli. Lehetnek határpontok, amelyek elemei az adott halmaznak, és lehetnek, amelyek nem elemei.*

1.1.10. Definíció. *Az S halmaz zárt, ha minden határpontját tartalmazza. Az S halmaz nyílt, ha minden pontja belső pont. Az S halmaz lezárása:*

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

Példa. A gömb nyílt halmaz. Ennek határpontjai:

$$\partial S(C, r) = \{P : \; \|P - C\| = r\},$$

és így lezárása:

$$\overline{S(C, r)} = \{P : \; \|P - C\| \le r\}.$$

Példa. Legyen $S = \{(x, y) : \; x, y \epsilon \mathbb{Q}\}$ a sík racionális koordinátájú pontjainak halmaza. Ekkor a halmaz lezárása $\overline{S} = \mathbb{R}^2$.

1.1.11. Definíció. *P az S halmaz torlódási pontja, ha létezik olyan $(P_n) \subset S$ sorozat, melyre $P_n \neq P$ és $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.*

Torlódási pontok lehetnek belső pontok és határpontok. Zárt halmaz minden torlódási pontját tartalmazza.

1.1.12. Definíció. *Legyen P és P' két $\mathbb{R}^2$-beli pont. Ezeket összekötő folytonos vonalat egy $\gamma : [\alpha, \beta] \; \to \; \mathbb{R}^2$ függvénnyel tudunk megadni. A vonal:*

$$\Gamma = \{\gamma(t) \; : \; t \epsilon [\alpha, \beta]\}, \qquad \gamma(\alpha) = P, \quad \gamma(\beta) = P'.$$

A $\gamma(t) \epsilon \mathbb{R}^2$ pont koordinátáit jelölje

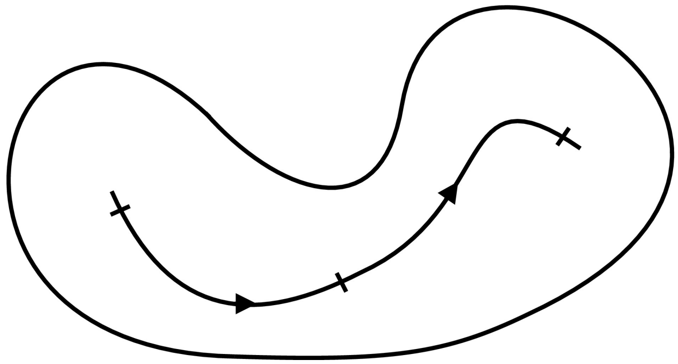
$$\gamma(t) =: (x(t), y(t)).$$

Feltesszük, hogy ezek az $x(t)$ és $y(t)$ koordináta-függvények,

$$x, y : [\alpha, \beta] \; \to \; \mathbb{R}$$

folytonosak.

Egy $\{\gamma(t) : t \epsilon [\alpha, \beta]\}$ vonalat is $\mathbb{R}^2$-beli részhalmaz, természetes módon.



1.2. ábra. Két pontot összekötő vonal.

1.1.13. Definíció. *Az* $S \subset \mathbb{R}^2$ *tartományt összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontját kiválasztva tartalmaz egy őket összekötő folytonos vonalat.*

1.1.14. Definíció. *Legyen* $P = (x, y)$ *és* $P' = (x', y')$ *két* $\mathbb{R}^2$*-beli pont. A két pontot összekötő szakaszt az alábbi*

$$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

függvény írja le:

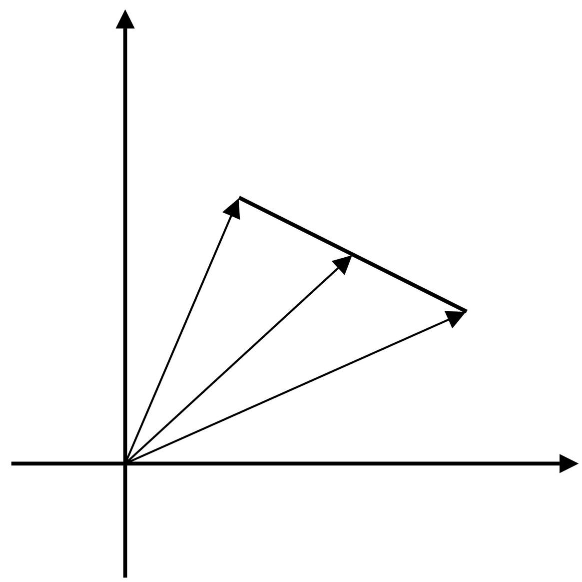
$$\gamma(t) := P + t(P' - P).$$

Speciálisan tehát $\gamma(0) = P$*,* $\gamma(1) = P'$*.*

A szakasz is folytonos vonal, mégpedig az alábbi koordináta-függvényekkel:

$$\begin{aligned} x(t) &= x + t(x' - x), \\ y(t) &= y + t(y' - y). \end{aligned}$$

1.1.15. Definíció. *Az* $S \subset \mathbb{R}^2$ *tartományt konvexnek nevezzük, ha bármely két pontjával együtt az őket összekötő szakaszt is tartalmazza.*



1.3. ábra. Két pontot összekötő szakasz.

1.1.3. Polárkoordináták

A síkbeli pontokat nem csak a megszokott Descartes-féle koordinárendszerben tudjuk megadni. Sokszor hasznos lesz a most bevezetésre kerülő polárkoordináták használata.

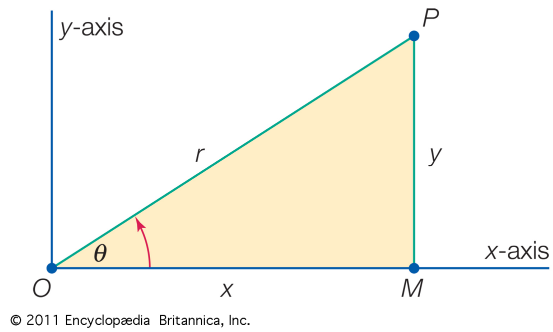
1.1.16. Definíció. *Egy adott $(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2$ pont polárkoordinátái (r,θ), melyeket így definiálunk:*
– r: a pont origótól vett távolsága,
– θ: az origóból az adott pontba mutató vektornak az x tengely pozitív részével bezárt szöge.

Így tehát a polárkoordinátákra $r\epsilon\mathbb{R}^+\cup\{0\}$, $\theta\epsilon[0,2\pi)$.

Ha r és θ adottak, akkor

$$x = r\cos(\theta), \qquad\qquad y = r\sin(\theta).$$

A fenti hozzárendelés egy-egyértelmű megfeleltetés, kivéve a $(0,0)$ pontot.



1.4. ábra. A polárkoordináták értelmezése.

Fordítva, ha x és y adottak, akkor a polárkoordináták:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

A θ-ra vonatkozó formulát finomítani kell attól függően, hogy a pont melyik síknegyedben van.

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & ha \quad x > 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & ha \quad x < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & ha \quad x > 0, y < 0 \\ \pi/2 & ha \quad x = 0, y > 0 \\ 3\pi/2 & ha \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

1.1.4. Általánosítás $\mathbb{R}^n$-re

$\mathbb{R}^n$ elemeit a rendezett szám n-esek jelentik: $P = (x_1, \ldots, x_n)\epsilon\mathbb{R}^n$, $P' = (x'_1, \ldots, x'_n)\epsilon\mathbb{R}^n$. Ezeket az n dimenziós tér pontjainak hívjuk.

1.1.17. Definíció. *A két pont távolsága:*

$$\|P - P'\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i)^2} = \left((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2\right)^{1/2}.$$

A távolságot szoktuk így is jelölni: $\rho(P, P')$.

1.1.18. Definíció. *Egy* $P = (x_1, \dots, x_n) \epsilon \mathbb{R}^n$ *pont környezetei* n*-dimenziós gömbök, melyeket így értelmezünk:*

$$S(P, \varepsilon) = \left\{ Q = (x'_1, \dots, x'_n) \epsilon \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2 < \varepsilon^2 \right\}.$$

1.2. Kétváltozós függvények

Adott $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely S elemeihez egy valós számot rendel. Értelmezési tartományát D_f -fel jelöljük (="domain"), értékkészletét R_f-fel (="range").

Függvény megadása azt jelenti, hogy megadjuk az értelmezési tartományt (ha ez megváltozik, már egy másik függvényt adunk meg) és a hozzárendelés módját.
Elnevezések: (x, y): független változó, u: függő változó.

Legegyszerűbb példák:

1. *Lineáris függvény.*
$$f(x, y) = ax + by + c,$$

ahol $a, b, c \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

2. *Másodfokú polinom.*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + j,$$

ahol $a, b, c, d, e, j \epsilon \mathbb{R}$ rögzítettek. Értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$.

3. *Polinom*okat két dimenzióban úgy definiáljuk, mint monomiálok összege. Egy monomiál általános alakja:

$$a_{mn} x^m y^n.$$

Együtthatója $a_{mn} \epsilon \mathbb{R}$, foka a benne levő fokok összege: $m + n$. Egy polinom fokát úgy definiáljuk, mint a legmagasabb fokú monomiáljának foka.

Egy polinom *homogén*, ha a polinomban szereplő monomiálok foka ugyanaz. Például egy homogén másodfokú polinom

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

További kétváltozós függvények konstrukciója az ismert egyváltozós függvények segítségével történhet, például:

$$u = \sin(xy) \qquad \text{vagy} \qquad u = \ln(y^2 + \cos(x/2)).$$

1.2.1. Geometriai reprezentáció

Ahogy az egyváltozós függvényt görbe segítségével tudtuk reprezentálni, a kétváltozós függvényt felületként fogjuk megadni. Ehhez tekintjük a háromdimenziós koordinátarendszert, melyben a koordináta tengelyek x, y és u. Ebben a koordinátarendszerben az (x, y) síkot képzelhetjük a vízszintes síknak. A függvény értelmezési tartományának tetszőleges (x, y) pontja fölött kijelöljük azt a P pontot, melynek harmadik koordinátája $u = f(x, y)$. Ha (x, y) bejárja a függvény értelmezési tartományát, akkor a megfelelő P pontok egy felületet fognak megadni.

Tehát az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt a térben az (x, y, u) számhármasok írják le, ahol $u = f(x, y)$. Az

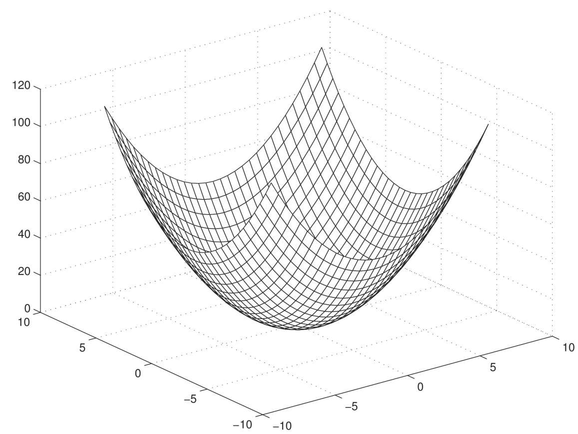
$$\{(x,y,u) : \; u = f(x,y), \; (x,y)\epsilon S\}$$

pontok felületet alkotnak a térben.

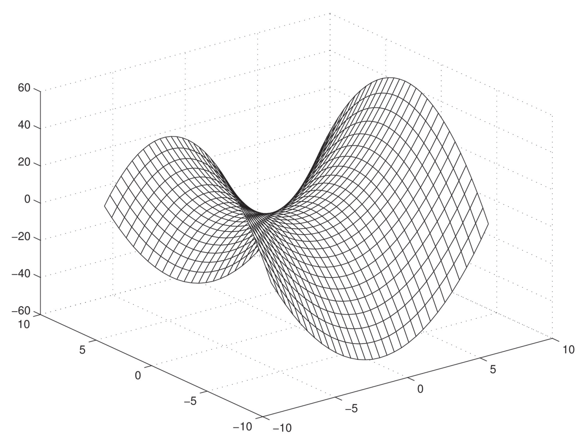
Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A felület egy darabja az 1.5. ábrán látható.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A megfelelő felület egy darabja az 1.6. ábrán látható.

A háromdimenziós ábrázolás nem mindig megfelelő. Egyrészt ezt több független változóra nem tudjuk kiterjeszteni. Másrészt még két független változó esetén is szerencsésebb az x, y síkban dolgozni, itt gond nélkül tudunk rajzolni. Ehhez ad segítséget a szintvonalakkal történő ábrázolás. Ekkor a



1.5. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény felülete.

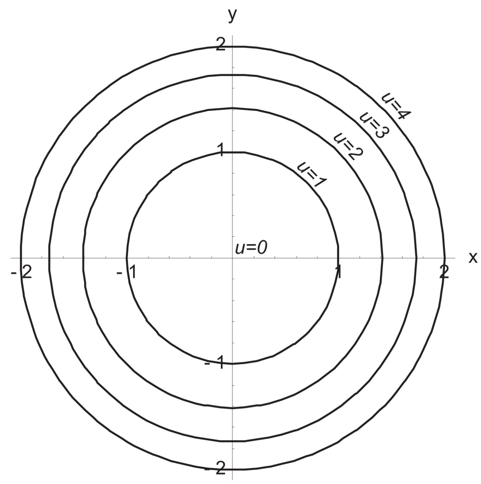


1.6. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény felülete.

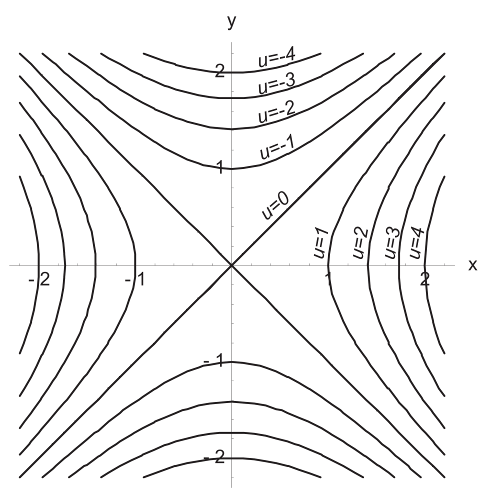
síkban ábrázoljuk azokat az (x, y) pontokat, melyekre $f(x, y) = k$ valamely rögzített $k \epsilon \mathbb{R}$ mellett.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 + y^2$. A szintvonalak koncentrikus körök, melyekből néhány az 1.7 ábrán látható.

Példa. Legyen $f(x, y) = x^2 - y^2$. A szintvonalak hiperbolák és egyenesek, melyekből néhány a 1.8 ábrán látható.



1.7. ábra. Az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény szintvonalai



1.8. ábra. Az $f(x, y) = x^2 - y^2$ függvény szintvonalai

A szintvonalakkal történő ábrázolás kiterjeszthető háromváltozós $f(x, y, z)$ függvényekre. Ekkor szintvonalak helyett $k = f(x, y, z)$ szintfelületeket kapunk, ahol k tetszőleges konstans.

1.2.2. Folytonosság

Megfogalmazzuk, hogy mit jelent az a tulajdonság, hogy egy f függvény folytonos a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban. Heurisztikusan elképzelve azt várjuk, hogy ha (x, y) közel van (x_0, y_0)-hoz, akkor $f(x, y)$ is közel van $f(x_0, y_0)$-hoz.

1.2.1. Definíció. *Legyen (x_0, y_0) az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos (x_0, y_0)-ban, ha $f(x_0, y_0)$ tetszőleges U környezetéhez megadható (x_0, y_0)-nak olyan V környezete, hogy minden $(x, y)\epsilon V$, $(x, y)\epsilon D_f$ esetén $f(x, y)\epsilon U$.*

Figyelembe véve a környezet definícióját, ezt így átfogalmazhatjuk:

1.2.2. Definíció. *Legyen $P_0 = (x_0, y_0)$ az f függvény értelmezési tartományának egy pontja. Az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontban, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, melyre*

$$\forall (x, y)\epsilon D_f, \qquad \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

esetén teljesül, hogy

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

1.2.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az f függvény sorozatfolytonos az értelmezési tartomány P_0 pontjában, ha minden $(P_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = f(P_0).$$

A kétfajta fogalom ekvivalenciájáról szól az alábbi tétel:

1.2.1. Tétel. *Az f függvény akkor és csakis akkor folytonos P_0-ban, ha ott sorozatfolytonos.*

Bizonyítás. Teljesen analóg az egyváltozós esettel, az olvasóra bízzuk.

Könnyen látható a fenti tétel alapján, hogy folytonos függvények összege, szorzata, skalárszorosa is folytonos lesz.

1.2.4. Definíció. *Ha egy függvény értelmezési tartományának egy pontjában nem folytonos, akkor ott szakadása van.*

1. Példa.

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{ha} \quad y \neq 0, \\ \\ 0 & \text{ha} \quad y = 0. \end{cases}$$

f értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$, szakadás az $y = 0$ egyenes mentén van, hiszen a függvény tetszőleges (x, y) pontban folytonos, ha $y \neq 0$.

2. Példa

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A függvény folytonos, ha sem x sem y nem 0. Ha $y \neq 0$, akkor rögzített y mellett $f(x, y)$, mint x függvénye folytonos, és

$$\lim_{x \to 0} f(x,y) = 0.$$

Ha $x \neq 0$, akkor rögzített x mellett $f(x, y)$, mint y függvénye folytonos, és

$$\lim_{y \to 0} f(x,y) = 0.$$

Tekintsük az $x = y$ egyenest. Ezen egyenes mentén $f(x, x) \equiv 1$. Tehát ha ennek az egyenesnek a mentén egy sorozattal tartunk az origoba, akkor a függvényértékek sorozata azonosan 1 lesz, így a határérték is. f tehát *nem folytonos a* $(0, 0)$*-ban.*

3. Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Folytonos-e a függvény a $(0,0)$ pontban?

Igen. A sorozatfolytonosságot igazoljuk. Legyen (P_n) egy olyan sorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = (0,0)$. P_n polárkoordinátáit jelölje $P_n = (r_n, \theta_n)$. Ekkor nyilván $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, míg a (θ_n) sorozat bármilyen lehet.

A fenti képletnek megfelelően $(x,y) \neq (0,0)$ esetén $f(x,y)$ így írható:

$$f(x,y) = \frac{r^2\cos^2(\theta)\, r^2\sin^2(\theta)}{r^2} = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta).$$

Ezért valóban a fenti sorozat mentén

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = 0,$$

tehát a függvény valóban folytonos.

1.2.2. Tétel. *(Bolzano tétel) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, melynek értelmezési tartomámya $S \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő. Legyen a tartomány két tetszőleges pontja $P = (x,y)$ és $P' = (x', y')$, melyekre*

$$A = f(x,y) < f(x',y') = B.$$

Ekkor tetszőleges $c \epsilon (A,B)$ számhoz létezik olyan $Q = (x_0, y_0) \epsilon S$ pont, melyre $f(x_0, y_0) = c$.

Bizonyítás. Az S tartomány összefüggő, ezért létezik P-t és P'-t összekötő S-beli folytonos görbe. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan

$$\begin{aligned} \gamma : [\alpha,\beta] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

függvény, melyre

$$\gamma(\alpha) = (x,y), \qquad \gamma(\beta) = (x', y'),$$

és az $(x(t),\, y(t))$ koordináta-függvények folytonosak. Vezessük be az

$$F(t) := f(x(t), y(t))$$

valós függvényt. $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ folytonos, melyre $F(\alpha) = A$ és $F(\beta) = B$.

Így az egydimenziós folytonos függvényekre ismert Bolzano-tétel szerint létezik olyan $\xi \epsilon (\alpha, \beta)$, melyre $F(\xi) = c$. Ezért a $Q := \gamma(\xi) \epsilon S$ pontra $f(Q) = c$.

1.2.5. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ adott függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$ tartomány. Azt mondjuk, hogy f egyenletesen folytonos S-ben, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy bármely két $P, P' \epsilon S$ pontra*

$$\|P - P'\| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(P) - f(P')| < \varepsilon.$$

A $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot az ε-hoz tartozó folytonossági modulusnak hívjuk.

1.2.6. Definíció. *Az $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény Lipschitz folytonos, ha létezik egy olyan $L > 0$ szám, melyre*

$$|f(P) - f(P')| \leq L \cdot \|P - P'\| \qquad \forall P, P' \epsilon S.$$

Az L számot Lipschitz-konstansnak hívjuk.

Megjegyzés. Egyenletes folytonosságot *tartományban* definiáljuk, nem pedig egyetlen pontban.

1.2.1. Állítás. *Ha f egyenletesen folytonos S-n, akkor S minden pontjában folytonos. Ha f Lipschitz folytonos egy tartományban, akkor ott egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Tetszőleges ε számhoz a $\delta := \dfrac{\varepsilon}{L}$ megfeleltetés jó lesz.

1.2.3. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

1.2.3. Tétel. *(Heine tétel) Legyen $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt tartomány. Tegyük fel, hogy $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt, "lemásoljuk" az egyváltozós bizonyítást. Tegyük fel, hogy a függvény nem egyenletesen folytonos. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, melyre nincs "jó" δ, azaz minden $\delta > 0$-hoz léteznek P, P' pontok, melyekre

$$\|P - P'\| < \delta, \qquad \text{de} \qquad |f(P) - f(P')| \geq \varepsilon.$$

Tekintsük ezt az ε-t. Ekkor a $\delta = 1/n$-hez is léteznek P_n, P'_n pontok, hogy:

$$\|P_n - P'_n\| < \frac{1}{n}, \qquad |f(P_n) - f(P'_n)| \geq \varepsilon.$$

Vizsgáljuk meg a (P_n) és (P'_n) pontsorozatokat.

Mivel S korlátos, így a két sorozat korlátos, ezért létezik konvergens részsorozatuk. Legyenek ezek az egyszerűség kedvéért az eredeti sorozatok:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} P'_n = P'.$$

Belátjuk, hogy $P = P'$. Ezek távolságát becsüljük a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával:

$$\|P - P'\| = \|P - P_n + P_n - P'_n + P'_n - P'\| \leq$$

$$\leq \|P - P_n\| + \|P_n - P'_n\| + \|P'_n - P'\|.$$

Ha $\eta > 0$ tetszőleges szám, akkor létezik N küszöbindex, hogy $\forall n > N$ esetén:

$$\|P_n - P\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \|P'_n - P'\| < \frac{\eta}{3}, \qquad \frac{1}{n} < \frac{\eta}{3}.$$

Ezért az előző egyenlőtlenséget folytatva:

$$\|P - P'\| \leq \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} + \frac{\eta}{3} = \eta.$$

Valóban $P = P'$. Ez a pont az S tartománynak egy torlódási pontja, és S zártsága miatt $P \epsilon S$. Itt a függvény folytonos. A kiválasztott $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $\forall Q$-ra: $\|Q - P\| < \delta$-ból következik, hogy $|f(Q) - f(P)| < \varepsilon$, ami ellentmond az indirekt feltételnek. Ezzel az tételt beláttuk.

1.2.4. Tétel. *(Weierstrass I. tétele) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ahol $S \subset \mathbb{R}^2$ korlátos és zárt. Ekkor f korlátos, azaz értékkészlete korlátos.*

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy f értékkészlete nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden n természetes számnál nagyobb értéket felvesz valamely $P_n = (x_n, y_n) \epsilon S$ pontban, azaz

$$|f(x_n, y_n)| > n, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

Mivel a (P_n) pontsorozat része a korlátos S halmaznak, ezért a pontsorozat is korlátos. Kiválasztható belőle konvergens rész-sorozat, legyen ez (P_{n_k}). Ennek határértékét jelölje P_0. S zártsága miatt $P_0 \epsilon S$, és itt f folytonos. Ezért egyrészt a folytonosság miatt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k}) < \infty,$$

másrészt az indirekt feltevés szerint

$$|f(x_{n_k}, y_{n_k})| > n_k, \qquad n_k \to \infty,$$

ami ellentmondás.

1.2.5. Tétel. *(Weierstrass II. tétele) Korlátos és zárt tartományon folytonos függvény felveszi a maximumát és minimumát.*

Bizonyítás. Legyen $H := \{f(x,y) : \ (x,y)\epsilon S\}$. Jelölje ennek supremumát $\beta = \sup H$. A supremum definíciója miatt létezik $(h_n)\subset H$ sorozat, hogy

$$\lim_{n\to\infty} h_n = \beta.$$

Tudjuk, hogy $h_n = f(x_n, y_n)$, ahol $P_n = (x_n, y_n)$. A (P_n) sorozat S-ben van, ezért korlátos, tehát van konvergens részsorozata, legyen ez (P_{n_k}).

$$\lim_{k\to\infty} P_{n_k} = P\epsilon S,$$

hiszen S zárt. Ebben a P pontban a függvény folytonos, tehát

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = f(P).$$

Másrészt

$$\lim_{k\to\infty} f(P_{n_k}) = \beta,$$

hiszen részsorozata $(f(x_n, y_n))$-nek. $\beta = f(P)$ és emiatt $\beta\epsilon H$ a maximum.

1.2.4. Határérték

1.2.7. Definíció. *Adott $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $P_0 = (x_0, y_0) \epsilon \mathbb{R}^2$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke a $P_0 = (x_0, y_0)$ pontban L, azaz*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$ szám, hogy ha

$$(x, y)\epsilon S \qquad \text{és} \qquad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

akkor $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

Az egydimenziós esethez hasonlóan most is megfogalmazható az *átviteli elv*:

1.2.2. Állítás.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

pontosan akkor teljesül, ha $\forall P_n = (x_n, y_n)\epsilon S$, $P_n \neq P_0$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

1. *Példa.* Legyen $S = \{(x, y) \ : \ y > 0\}$ a felső félsík, és tekintsük azt az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$f(x, y) = e^{-x^2/y}.$$

Legyen $P_0 = (x_0, 0)$ pont, ahol $x_0 \neq 0$ rögzített. Ekkor

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} e^{-x^2/y} = \lim_{y\to 0+} e^{-x_0^2/y} = 0,$$

ezért itt van határérték. Az origó-beli határérték létézését vizsggáljuk. Ha az $y = kx^2$ parabola mentén tartunk a $(0, 0)$-ba egy fix k mellett, azaz tekintünk egy $P_n = (x_n, kx_n^2)$ sorozatot, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, akkor minden n-re

$$f(P_n) = e^{-x_n^2/kx_n^2} = e^{-1/k}.$$

Tehát a $(0,0)$-beli határérték függ a sorozat választásától, ezért a függvény határértéke nem létezik a $(0,0)$ pontban.

2. *Példa.* Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x+2y}{3x-y} & \text{ha} \quad 3x-y \neq 0 \\ \\ 0 & \text{ha} \quad 3x-y = 0 \end{cases}$$

Legyen $a_n = 1/n$, és az egyik pontsorozat

$$P_n = (a_n, a_n^2).$$

Ekkor

$$f(P_n) = \frac{n+2}{3n-1},$$

és így tehát

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (0,0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = \frac{1}{3}.$$

Legyen egy másik pontsorozat

$$P_n' = (a_n^2, a_n).$$

Ekkor

$$f(P_n') = \frac{1+2n}{3-n},$$

és így tehát

$$\lim_{n\to\infty} P_n' = (0,0) \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n) = -2.$$

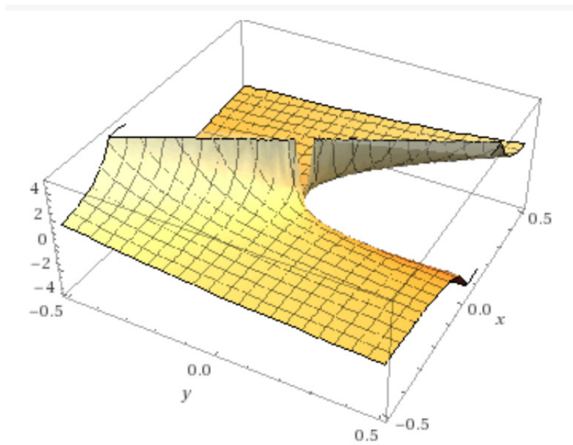
Ezért az origóban nincs határértéke a függvénynek. A fenti gondolatmenetben az történt, hogy a $(0,0)$-beli határértéket két közelítéssel próbáltuk meg kiszámolni. Egyrészt

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}.$$

Másrészt

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+2y}{3x-y} = \lim_{y\to 0} \frac{2y}{-y} = -2$$

Tehát mivel $-2 \neq 1/3$ ezért nincs határérték. Megjegyezzük, hogy ha a fenti határértékek egyenlőek lennének, az még nem volna elég a kétdimenziós határérték létezéséhez.



1.9. ábra. A 2. példában szereplő függvény az origó körül

1.3. Differenciálszámítás

1.3.1. Parciális deriváltak

1.3.1. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény. Legyen (x_0, y_0) az S halmaz belső pontja. Ha létezik az alábbi véges határérték:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

akkor ezt a mennyiséget a függvény x szerinti parciális deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban. Ezt így jelöljük:

$$f'_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

Ha létezik az alábbi véges határérték:

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

akkor ezt a mennyiséget a függvény y szerinti parciális deriváltjának nevezzük az (x_0, y_0) pontban. Ezt így jelöljük:

$$f'_y(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0).$$

A parciális derivált megadásánál fontos jellemző, hogy *melyik változó* szerinti parciális deriváltat tekintjük.

A parciális deriváltak is számolhatók az egyváltozós függvényeknél megismert módon:

Példa. Ha $f(x,y) = xy$, akkor ennek parciális deriváltjai

$$f'_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)y - xy}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{hy}{h} = y.$$

Hasonlóan $f'_y(x,y) = x$.

A parciális deriválást értelmezhetjük a következőképpen is. Rögzített y_0 mellett definiáljuk az $f_1(x) = f(x,y_0)$ egyváltozós valós függvényt. Ha (x_0,y_0) belső pontja D_f-nek, akkor x_0 belső pontja f_1 értelmezési tartományának. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) = f'_1(x_0).$$

Hasonlóképp rögzített x_0 mellett definiáljuk az $f_2(y) = f(x_0,y)$ egyváltozós valós függvényt. Ha (x_0,y_0) belső pontja D_f-nek, akkor y_0 belső pontja f_2 értelmezési tartományának. Ekkor

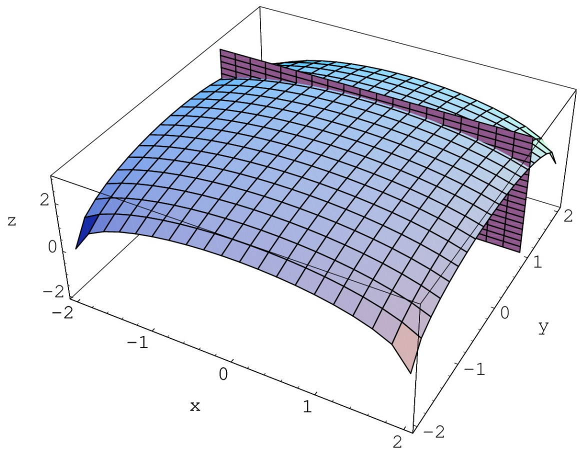
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) = f'_2(y_0).$$

A fent definiált f_1 és f_2 függvényeket az eredeti függvény *metszetfüggvényei*nek nevezzük.

Ha a függvény parciális deriváltjai egy S tartomány minden pontjában léteznek, akkor értelmezhető a *parciális derivált függvény.* Megjegyezzük, hogy a parciális derivált-függvény ugyanolyan típusú, mint az eredeti: kétváltozós, valós függvény.

Ha a parciális deriváltfüggvénynek létezik parciális deriváltja, akkor másodrendű parciális deriváltat kaphatunk. Például:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = f''_{xy}(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f'_x(x,y+h) - f'_x(x,y)}{h}.$$



1.10. ábra. Az $f(x,y) = xy$ függvényből rögzített $y = 1$ mellett egyváltozós függvényt kapunk.

Példa. $f(x,y) = x^2 + y^2$. Ekkor az első deriváltak

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x \\ f'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y, \end{aligned}$$

a második deriváltak

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= 2 \\ f''_{yy}(x,y) &= 2 \\ f''_{yx}(x,y) &= 0 \\ f''_{xy}(x,y) &= 0. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak kiszámítására alapvetően kétfajta módszert használunk. Egyrészt az egyváltozós valós függvényekre megismert módszerek alapján, másrészt közvetlenül a definíció alapján.

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2 y}{x^2+y^2} + 2x + 3 & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\[2ex] 3 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Léteznek-e a parciális deriváltak a $(0,0)$ pontban?
Számoljuk ki a $f'_x(0,0)$ parciális deriváltat a definíció alapján:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h+3-3}{h} = 2.$$

Ugyanezt megtehetjük az egyváltozós valós függvényre megismert módszerek alapján. Ha $f(x,0) =: f_1(x)$, akkor ez a függvény

$$f_1(x) := \begin{cases} \dfrac{0(x+2)^2}{x^2+0} + 2x + 3 = 2x+3 & \text{ha} \quad x \neq 0 \\ \\ 3 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}$$

Ekkor $f'_1(0) = 2$, vagyis az x szerinti parciális derivált létezik.

Próbáljuk meg kiszámítani $f'_y(0,0)$-t először a definíció alapján.

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4}{h^2},$$

és ez a határérték nem létezik. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha az egyváltozós valós függvényekre megismert módszerek alapján számolunk. Legyen ugyanis $f(0,y) =: f_2(y)$. Ekkor

$$f_2(y) := \begin{cases} \dfrac{y(0+2)^2}{0+y^2} + 3 = \dfrac{4}{y} + 3 & \text{ha} \quad y \neq 0 \\ \\ 3 & \text{ha} \quad y = 0 \end{cases}$$

Ez a függvény nem deriválható $y = 0$-ban.

Láttuk, hogy egyváltozós valós függvények esetén, ha egy függvény differenciálható egy a pontban, akkor ott folytonos is. Kérdés, hogy a ha a parciális deriváltak léteznek, akkor vajon folytonos-e a függvény az adott pontban? Nem feltétlenül.

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

A parciális deriváltak léteznek a $(0,0)$ pontban, hiszen

$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \\ f'_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Mégis belátjuk, hogy a függvény nem folytonos $(0,0)$-ban. $y = kx$-et behelyettesítve ugyanis azt kapjuk, hogy

$$f(x,kx) = \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1+k^2},$$

vagyis különböző egyenesek mentén 0-hoz tartva a határérték az egyenes meredekségétől függ.

Szemléletesen, a probléma abból adódik, hogy a parciális deriváltak megadják a függvény simaságát az x ill. az y tengelyek mentén, de több információ nincs.

1.3.1. Tétel. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $(x_0, y_0) \epsilon \operatorname{int} S$. Tegyük fel, hogy az f'_x és f'_y parciális deriváltak léteznek (x_0, y_0) valamely $U \subset S$ környezetében. Tegyük fel továbbá, hogy a parciális deriváltak itt korlátosak, azaz*

$$|f'_x(x,y)| \le M, \quad |f'_y(x,y)| \le M \qquad \forall (x,y) \epsilon U.$$

Ekkor az f függvény folytonos az (x_0, y_0)-ban.

Bizonyítás előtt ismétlésképpen kimondjuk a *Lagrange-féle középértéktételt*. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos illetve belső pontjaiban differenciálható függvény. Ekkor van olyan $\xi \epsilon (a,b)$, melyre

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi).$$

Kicsit másképpen megfogalmazva: ha $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ folytonos és differenciálható, akkor létezik $\xi \epsilon (a, a+h)$, melyre $f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(\xi)$. A fenti ξ felírható $\xi = a + \theta h$ alakban, ahol $0 < \theta < 1$ Így azt írhatjuk, hogy

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + \theta h) \cdot h.$$

Bizonyítás. Legyen $(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Nézzük meg a függvény megváltozását. A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leq$$

$$\leq |f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)| + |f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)|. \quad (1.1)$$

A Lagrange-féle középértéktételből következik, hogy

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) = f'_y(x_0 + \Delta x, \xi_y)\Delta y,$$

ahol f_2 a második metszetfüggvénye f-nek.

A második tag hasonlóan írható:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_1(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0) = f'_x(\xi_x, y_0)\Delta x,$$

ahol f_1 az első metszetfüggvénye f-nek. Itt $\xi_x \epsilon (x_0, x_0+\Delta x)$, $\xi_y \epsilon (y_0, y_0+\Delta y)$. Így az (1.1) egyenlőtlenséget folytatva:

$$\leq |f'_x(\xi_x, y_0)| \cdot |\Delta x| + |f'_y(x_0 + \Delta x, \xi_y)| \cdot |\Delta y| \leq M(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Tehát

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \leq M(|\Delta x| + |\Delta y|).$$

Ezért

$$\lim_{\Delta x,\ \Delta y \to 0} |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| = 0,$$

tehát a függvény folytonos (x_0, y_0)-ban.

Az előző példa folytatása. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Ennek például x szerinti parciális deriváltja:

$$f'_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ez a függvény az origó közelében nem korlátos, hiszen például $y = 2x$ esetén

$$f'_x(x, 2x) = \frac{3x^3}{25x^4} = \frac{3}{25x},$$

ami tetszőlegesen nagy lehet, ha x közel van 0-hoz. Tehát nem meglepő, hogy a függvény az origóban nem folytonos.

Példa. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Igazoljuk a fenti tétel segítségével, hogy $f(x,y)$ folytonos $(0,0)$-ban. Elsőként meghatározzuk a parciális deriváltakat az origóban

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0,$$

illetve hasonlóan $f'_y(0,0) = 0$. A többi pontban a képlet alapján számolunk parciális deriváltat

$$f'_x(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f'_y(x,y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Elegendő belátni, hogy ezek korlátosak a $(0,0)$ egy környezetében. Tekintsünk egy r sugarú gömböt az origó körül.

$$U = \{(x,y): \ \sqrt{x^2+y^2} < r\}.$$

Itt f'_x illetve f'_y korlátosak.

1.3.2. Tétel. *(Deriváltak sorrendjének felcserélhetősége) Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós valós függvény,* $(x,y)\epsilon \ \mathrm{int}S$*. Ha a pont egy környezetében léteznek az* f''_{xy} *és* f''_{yx} *másodrendű parciális deriváltak, és az adott pontban folytonosak is, akkor itt a deriválások sorrendje felcserélhető, azaz*

$$f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y).$$

A Tételt nem bizonyítjuk.

A deriválási sorrend felcserélhetőségének messzemenő következményei vannak. A fenti tételt alkalmazva az $f'_x(x,y)$ vagy $f'_y(x,y)$ függvényekre azt kapjuk - feltéve, hogy a megfelelő deriváltak folytonos függvények, - hogy

$$f'''_{xxy} = f'''_{xyx} = f'''_{yxx},$$

és sok hasonló összefüggést írhatnánk fel. Tehát két független változó esetén magasabb rendű parciális deriváltak kiszámításakor a deriválások sorrendje tetszőlegesen csoportosítható, feltéve, hogy a parciális deriváltak folytonos függvények.

Példa. Megmutatjuk, hogy a deriválások sorrendje nem cserélhető fel automatikusan. Példát mutatunk, hogy a vegyes parciális deriváltak igenis különbözőek lehetnek. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}xy & \text{ha} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{ha} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Meghatározzuk a vegyes másodrendű parciális deriváltakat a $(0,0)$ pontban:

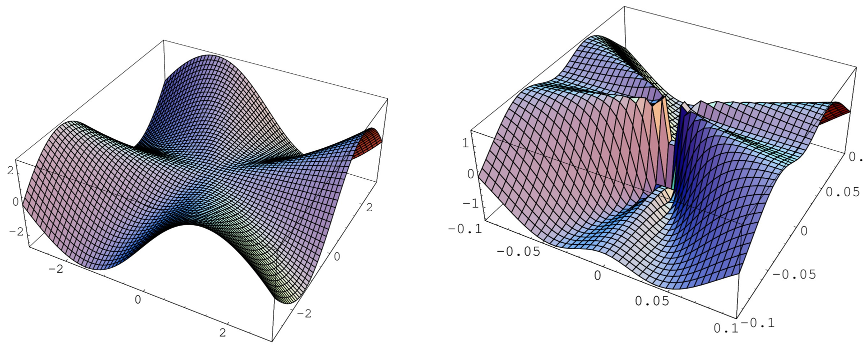
$$f'_x(0,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}hy}{h} = y \lim_{h\to 0} \frac{h^2-y^2}{h^2+y^2} = -y,$$

$$f''_{yx}(0,0) = -1.$$

Fordított sorrendben deriválva

$$f'_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = x \qquad \Longrightarrow \qquad f''_{xy}(0,0) = 1.$$

A két érték különbözik, ami csak f''_{xy} nem-folytonossága miatt lehet, a fenti tétel miatt. A függvényt és annak egyik vegyes másodrendű deriváltját ábrázoltuk az 1.11 ábrán.



1.11. ábra. A példában szereplő függvény és vegyes második deriváltja, f''_{yx}.

1.3.2. Teljes differenciálhatóság

Emlékeztetünk arra, hogy az f egyváltozós valós függvény esetén azt mondtuk, hogy differenciálható az $x \epsilon \operatorname{int} D_f$ pontban, ha a különbségi hányados határértéke létezik:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = A.$$

Ekkor $f'(x) = A$.

Ez azt jelenti, hogy ha Δx elég kicsi, akkor

$$f(x+\Delta x) = f(x) + A\Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ahol A független Δx-től és

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0,$$

tehát a függvény jól közelíthető lineáris függvénnyel.

1.3.2. Definíció. *Egy $h(x)$ függvény kisordó a 0-ban, ha*

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)}{x} = 0.$$

Ezt úgy jelöljük, hogy $h(x) = o(x)$.

1.3.3. Definíció. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, és $(x, y) \epsilon \operatorname{int} S$. Az f függvény differenciálható (x, y)-ban, ha léteznek olyan A, B, C számok, melyekre elegendően kicsi Δx és Δy mellett teljesül, hogy*

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = A\Delta x + B\Delta y + C + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) \tag{1.2}$$

ahol A, B, C függetlenek Δx-től és Δy-tól.

1.3.3. Tétel. *Ha f differenciálható az (x, y) pontban, akkor ott folytonos is és léteznek az adott pontban vett parciális deriváltak. Továbbá a (1.2) képletben szereplő konstansokra*

$$C = f(x, y); \qquad A = f'_x(x, y); \qquad B = f'_y(x, y).$$

Bizonyítás.

1. Válasszunk $\Delta x = \Delta y = 0$-t. Ekkor az (1.2) egyenlet szerint:

   $$f(x, y) = A \cdot 0 + B \cdot 0 + C + 0 = C.$$

   Tehát a C megegyezik a helyettesítési értékkel. Ez alapján könnyen beláthatjuk a folytonosságot:

   $$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) =$$

   $$= \lim_{\Delta x \to 0} A\Delta x + \lim_{\Delta y \to 0} B\Delta y + C + \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = C.$$

2. Igazoljuk az A-ra vonatkozó állítást. Legyen $\Delta y = 0$. Ekkor az (1.2) egyenlet így alakul:

   $$f(x + \Delta x, y) = A\Delta x + f(x, y) + o(|\Delta x|).$$

   Ez alapján számoljuk ki a parciális deriváltat:

   $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}) = A.$$

Következmény. Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor elegendően kicsi Δx, Δy mellett így írható:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}). \tag{1.3}$$

A derivált geometriai jelentése is hasonló az egydimenziós esethez. Ha a függvény differenciálható egy pontban, akkor a pont közelében a függvény értékét az érintősík segítségével közelíthetjük. A sík megadásához megadjuk egy pontját - ez $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ - és megadjuk a sík meredekségét, ami a két parciális derivált. Az érintősík egyenlete tehát ez lesz:

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ezt az egyenletet írjuk át abba a megszokott alakba, ahogy a sík egyenletét fel szoktuk írni:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (-1)(z - z_0) = 0,$$

ahol $z_0 = f(x_0, y_0)$. Erről leolvasható, hogy a sík (egyik) normálvektora

$$\underline{n} = (f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1).$$

1.3.4. Definíció. *Ha az f függvény differenciálható az (x, y) pontban, akkor ebben a pontban a derivált egy kétdimenziós vektor lesz, melyet gradiensnek nevezünk:*

$$\text{grad } f(x, y) = (f'_x(x, y), f'_y(x, y)).$$

Ha az f függvény egy S_0 halmaz minden pontjában differenciálható, akkor a deriváltfüggvény

$$\text{grad } f: \ S_0 \to \mathbb{R}^2$$

típusú lesz.

1.3.4. Tétel. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós valós függvény, $(x, y) \epsilon \operatorname{int} S$. Tegyük fel, hogy az $f'_x(x, y)$ és $f'_y(x, y)$ parciális deriváltak léteznek a pont egy környezetében, és folytonosak ebben a pontban. Ekkor f differenciálható (x, y)- ban.*

Bizonyítás. A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = \\ = \ & f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = \\ = \ & f'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta y + f'_x(x+\theta'\Delta x, y)\Delta x \end{aligned}$$

valamely $0 < \theta, \theta' < 1$ konstansokkal. A parciális deriváltak folytonossága miatt:

$$f'_y(x+\Delta x, y+\theta\Delta y) = f'_y(x,y) + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$$
$$f'_x(x+\theta'\Delta x, y) = f'_x(x,y) + \varepsilon_2(\Delta x),$$

ahol

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) = 0, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_2(\Delta x) = 0.$$

Így az előző egyenlőségbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_3(\Delta x, \Delta y),$$

azaz differenciálható.

Megjegyzés. Bevezetve a

$$\Delta f(x,y) := f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

jelölést a (1.3) összefüggés tömören így is írható:

$$\Delta f(x,y) = \text{grad } f(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

A fenti tétel feltétele *nem szükséges* a teljes differenciálhatósághoz. Legyen

$$f(x,y) = |xy|.$$

Ekkor

$$f(x,y) - f(0,0) = 0 \cdot x + 0 \cdot y + |xy|$$

megfelel a (1.2) feltételnek, hiszen

$$|xy| = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

ezért a függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban. Másrészt könnyen belátható, hogy $f'_x(0,y)$, $y \neq 0$ és $f'_y(x,0)$, $x \neq 0$ parciális deriváltak nem léteznek, ha $x \neq 0$ illetve $y \neq 0$. Természetesen a $(0,0)$-ban léteznek a parciális deriváltak.

1.3.3. Iránymenti derivált

A teljesen differenciálható függvények egy fontos tulajdonsága, hogy nem csak az x és y szerinti parciális deriváltak léteznek - azaz az x és y irányban deriválhatók - hanem tetszőleges α irányban is. Ez alatt azt fogjuk érteni, hogy az (1.2) egyenletben Δx és Δy nem egymástól függetlenül tart 0-hoz.

1.3.5. Definíció. *Legyen $\alpha \epsilon [0, 2\pi)$. Az α irányú iránymenti deriváltat így értelmezzük:*

$$D_\alpha f(x,y) = \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x,y) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

Ez azt jelenti, hogy az $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ fügvényértéket csak megadott irányban nézzük, nevezetesen:

$$\Delta x = \varrho\cos\alpha, \qquad \Delta y = \varrho\sin\alpha,$$

ahol $\varrho \epsilon \mathbb{R}$.

1.3.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy az f függvény differenciálható (x,y)-ban. Ekkor itt létezik az iránymenti derivált tetszőleges $\alpha \epsilon [0, 2\pi)$ esetén, és*

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Bizonyítás. A differenciálhatóság miatt

$$f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) = f(x,y) + f'_x(x,y)\varrho\cos\alpha + f'_y(x,y)\varrho\sin\alpha + o(|\varrho|)$$

ha $|\varrho|$ elegendően kicsi. Ebből következik, hogy

$$\frac{f(x+\varrho\cos\alpha, y+\varrho\sin\alpha) - f(x,y)}{\varrho} = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha + \frac{o(|\varrho|)}{\varrho},$$

melynek határértékeként az állítást kapjuk.

Megjegyzés. Speciális esetben, $\alpha = 0$ ill. $\alpha = \pi/2$-re megkapjuk a parciális deriváltakat:

$$D_0 f(x,y) = f'_x(x,y), \qquad D_{\pi/2} f(x,y) = f'_y(x,y).$$

Általában az iránymenti derivált:

1.3.6. Definíció. *Adott egy* $v \epsilon \mathbb{R}^2$ *irány, melyre* $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$. *A* v *iránymenti deriváltat egy* (x,y) *pontban így értelmezzük:*

$$D_v f(x,y) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x + \varrho v_1, y + \varrho v_2) - f(x,y)}{\varrho},$$

ha ez a határérték létezik.

A $D_v f(x,y)$ iránymenti derivált valós szám.

Következmény. *A* $D_v f(x,y)$ *iránymenti derivált kiszámítása:*

$$D_v f(x,y) = v_1 \ f'_x(x,y) + v_2 \ f'_y(x,y).$$

Példa. Legyen

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

azaz a függvény egy ponthoz hozzárendeli az origótól vett távolságát.

Adott α irányhoz tartozó irányvektor $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Határozzuk meg a $D_\alpha f(x,y)$ iránymenti deriváltat. Elsőként a parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta,$$

$$f'_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta,$$

ahol θ az (x,y) pont második polárkoordinátája. Ekkor:

$$D_\alpha f(x,y) = f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha =$$

$$= \cos\theta \ \cos\alpha + \sin\theta \ \sin\alpha = \cos(\theta - \alpha).$$

Látható, hogy ha $\alpha = \theta$, akkor az iránymenti derivált maximális abszolút értékű, míg $\theta - \alpha = \pi/2$ esetén az iránymenti derivált 0. (Vajon hogyan értelmezhetjük geometriailag ezt a tényt?)

1.3.4. Lagrange-féle középértéktétel

1.3.5. Tétel. *Legyen* $f : S \to \mathbb{R}$ *olyan kétváltozós függvény, mely differenciálható az* $(x_0, y_0)\epsilon\ \mathrm{int}S$ *egy* δ *sugarú környezetében, melyet* U *jelöljön. Legyen* $(x_1, y_1)\epsilon U$*. Ekkor létezik* $\theta\epsilon(0,1)$*, melyre:*

$$f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_\theta, y_\theta)\Delta x + f'_y(x_\theta, y_\theta)\Delta y = \mathrm{grad}\ f(x_\theta, y_\theta) \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix},$$

ahol

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta y = y_1 - y_0, \qquad (x_\theta, y_\theta) = (x_0 + \theta \cdot \Delta x, y_0 + \theta \cdot \Delta y).$$

Bizonyítás. A Tételt általános esetben bizonyítjuk az 1.8.2. fejezetben.

1.3.5. Magasabb rendű deriváltak

1.3.7. Definíció. *Tekintsük az* $f : S \to \mathbb{R}$ *kétváltozós függvényt, és legyen* (x_0, y_0) *belső pontja* S*-nek. Azt mondjuk, hogy* f *kétszer differenciálható ebben a pontban, ha a függvény differenciálható a pont egy környezetében, és az* $f'_x(x, y)$ *és az* $f'_y(x, y)$ *parciális derivált függvények is differenciálhatóak az* (x_0, y_0) *pontban.*

1.3.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy* f *kétszer differenciálható az értelmezési tartomány belsejében lévő* (x, y) *pontban. Ekkor itt*

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

1.3.8. Definíció. *Ha a függvény kétszer differenciálható* (x_0, y_0)*-ban, akkor értelmezhetőek az* $f''_{xx}(x_0, y_0)$*,* $f''_{xy}(x_0, y_0)$*,* $f''_{yx}(x_0, y_0)$ *és az* $f''_{yy}(x_0, y_0)$ *másodrendű parciális deriváltak. Ezekből áll az alábbi mátrix:*

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix},$$

mely a függvény második deriváltja. Ez a az (x_0, y_0) *ponthoz tartozó Hesse mátrix.*

A fenti tétel értelmében egy kétszer differenciálható függvény Hesse mátrixa mindig szimmetrikus mátrix.

Megjegyzés. Ne felejtsük el, hogy egy kétváltozós függvény első deriváltja 2 dimenziós sorvektor, második deriváltja 2×2 dimenziós mátrix.

1.3.6. Összetett függvény. Láncszabály két dimenzióban

Ismétlés. A láncszabály összefett függvények (függvények kompóziciójának) deriválására vonatkozik. Valós függvényekre ezt állította:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

f a külső, g a belső függvény. Mindkettő egyváltozós, valós értékű.

Láncszabály, 1. speciális eset

A *külső* függvény egyváltozós, legyen ez $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. A *belső* függvény kétváltozós, legyen ez $\phi : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$. Feltesszük, hogy $R_\phi \subset D$. Ekkor az összetett függvény kétváltozós valós értékű függvény, mely így értelmezhető:

$$F = f \circ \phi : S \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = f(\phi(x,y)).$$

1.3.7. Tétel. *Tegyük fel, hogy ϕ differenciálható az $(x,y)\epsilon\ \mathrm{int}S$ pontban, és f differenciálható az $u = \phi(x,y)$ pontban. Ekkor az összetett függvény is differenciálható, és a parciális deriváltak:*

$$F'_x(x,y) = f'(\phi(x,y))\, \phi'_x(x,y),$$

$$F'_y(x,y) = f'(\phi(x,y))\, \phi'_y(x,y).$$

Bizonyítás. A differenciálhatóság definiciójából induljunk ki:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y)) - f(\phi(x,y)) = (*)$$

f differenciálhatósaága ezt jelenti:

$$f(u+\Delta u)-f(u)=f'(u)\ \Delta u+\varepsilon(\Delta u),$$

ahol $\varepsilon(\Delta u)$ kisordó. Emiatt a fenti egyenletet folytathatjuk:

$$\begin{aligned}(*) \quad &= \quad f'(\phi(x,y))\Delta\phi+\varepsilon= \\ &= \quad f'(\phi(x,y))\cdot\left(\phi'_x(x,y)\Delta x+\phi'_y(x,y)\Delta y+\varepsilon_1\right)+\varepsilon.\end{aligned}$$

A fenti egyenletben ϕ differenciálhatóságát használtuk fel, ε_1 szintén kisordó függvény.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x,y)=$$

$$=\left[f'(\phi(x,y))\phi'_x(x,y)\right]\cdot\Delta x+\left[f'(\phi(x,y))\phi'_y(x,y)\right]\cdot\Delta y+\varepsilon_2.$$

Ez épp azt jelenti, hogy F differenciálható. Továbbá a jobboldalon Δx szorzója $F'_x(x,y)$ és Δy szorzója $F'_y(x,y)$.

Példa. Legyen $F(x,y)=f^2(x,y)$, ahol f differenciálható. Ekkor

$$F'_x(x,y)=2f(x,y)\ f'_x(x,y),\qquad F'_y(x,y)=2f(x,y)\ f'_y(x,y).$$

Láncszabály, 2. speciális eset

A *külső* függvény kétváltozós, legyen ez $f:S\to\mathbb{R}$, $S\subset\mathbb{R}^2$. *Két belső* függvény van, mindkettő egyváltozós, legyenek ezek $\varphi,\psi:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}$. Feltesszük, hogy $R_\varphi\times R_\psi\subset S$. Ekkor az összetett függvény egyváltozós valós függvény, így értelmezhető:

$$F:D\to\mathbb{R},\qquad F(t)=f(\varphi(t),\psi(t)).$$

1.3.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy φ és ψ differenciálhatóak a $t\epsilon$ int$D$ pontban, és f differenciálható az $(x,y)=(\varphi(t),\psi(t))$ pontban. Ekkor az összetett függvény is differenciálható, és deriváltja:*

$$F'(t)=f'_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f'_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t).$$

Megjegyzés. A könnyebb átláthatóság kedvéért a fenti formula argumentumok nélkül:

$$\big(f \circ (\varphi, \psi)\big)' = f'_x \varphi' + f'_y \psi'$$

Előadáson elmondom a bizonyítást. Aki nem jegyzeteli le, bizonyítsa be (nem nehéz HF).

Példa. Kétváltozós f függvény α irány menti deriváltját számoljuk az (x, y) pontban. Ehhez az $f(x, y)$ függvénybe behelyettesítjük a

$$\varphi(t) = x + t\cos\alpha, \qquad \psi(t) = y + t\sin\alpha$$

változókat, és a deriváltat nézzük a $t = 0$ helyen. A fenti tétel alapján:

$$F(t) = f(x + t\cos\alpha, y + t\sin\alpha)$$

deriváltja a $t = 0$ helyen: $F'(0) =$

$$= f'_x(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\varphi'(0) + f'_y(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\psi'(0) =$$

$$= f'_x(x, y)\cos\alpha + f'_y(x, y)\sin\alpha.$$

Ez a jól ismert formulát adja.

Láncszabály, 3. speciális eset

Adott $f(u, v)$ kétváltozós függvény, ahol az u és v változók helyére kétváltozós függvényeket helyettesítünk:

$$u = \phi(x, y), \qquad v = \Psi(x, y).$$

Legyenek $\psi, \phi : R \to \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ adott kétváltozós függvények. Jelölje:

$$S := \{(u, v) : u = \phi(x, y),\ v = \psi(x, y),\ (x, y)\epsilon R\}.$$

Ekkor az összetett függvény $F : R \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, melyet az alábbi képlet definiál:

$$F(x, y) = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$$

Példa. Legyen
$$F(x,y) = e^{xy} sin(x+y).$$
Ezt a függvényt így tudjuk összetett függvényként értelmezni. Legyenek
$$\begin{aligned} u &= \phi(x,y) = xy \\ v &= \psi(x,y) = x+y \\ f(u,v) &= e^u \sin(v). \end{aligned}$$

A definícióból könnyen adódik az alábbi állítás:

1.3.2. Állítás. *Ha ϕ, ψ folytonosak (x,y)-ban, és f folytonos az*
$$(u,v) = \big(\phi(x,y), \psi(x,y)\big)$$
pontban, akkor F is folytonos (x,y)-ban.

1.3.9. Tétel. *(Láncszabály.) Tegyük fel, hogy ϕ, ψ differenciálhatók (x,y)-ban, és f is differenciálható az $(u,v) = (\phi(x,y), \psi(x,y))$ pontban. Ekkor F is differenciálható (x,y)-ban, és parciális deriváltjai:*
$$F'_x(x,y) = f'_u\left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right)\phi'_x(x,y) + f'_v\left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right)\psi'_x(x,y),$$
$$F'_y(x,y) = f'_u\left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right)\phi'_y(x,y) + f'_v\left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right)\psi'_y(x,y).$$

Bizonyítás. Írjuk fel az F összetett függvény megváltozását:
$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) =$$
$$= f\left(\phi(x+\Delta x, y+\Delta y), \psi(x+\Delta x, y+\Delta y)\right) - f\left(\phi(x,y), \psi(x,y)\right) =$$
$$= f'_u(\phi(x,y), \psi(x,y))\Delta\phi + f'_v(\phi(x,y), \psi(x,y))\Delta\psi + \varepsilon_1(x,y),$$
ahol $\varepsilon_1(x,y) = o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Itt felhasználtuk a külső függvény differenciálhatóságát. A belső függvények megvátozásait így írhatjuk:
$$\Delta\phi = \phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \phi(x,y) = \phi'_x(x,y)\Delta x + \phi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_2(x,y),$$
$$\Delta\psi = \psi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \psi(x,y) = \psi'_x(x,y)\Delta x + \psi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_3(x,y),$$

ahol $\varepsilon_2(x,y)$ és $\varepsilon_3(x,y)$ is $o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$ függvények. Mindezeket visszahelyettesítve megkapjuk F differenciálhatóságát és parciális deriváltjait.

Példa. (folytatás) A fenti függvény x szerinti parciális deriváltja:

$$F'_x(x,y) = e^u \sin(v)y + e^u \cos(v) = e^{xy}\left(\sin(x+y)y + \cos(x+y)\right).$$

Példa. Legyen

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Helyettesítsük be x és y helyére a polárkoordinátákat, legyenek tehát

$$\begin{aligned} x &= x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y &= y(r,\theta) = r\sin(\theta). \end{aligned}$$

Ekkor az összetett függvény

$$F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) = r^2.$$

Számoljuk ki F θ szerinti parciális deriváltját a láncszabály alapján. A képlet, amit használnunk kell:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Ezek a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x & \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} &= r(-\sin(\theta)) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y & \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos(\theta). \end{aligned}$$

Így ezekből összerakva a deriváltat ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= 2xr(-\sin(\theta)) + 2yr\cos(\theta) \\ &= 2r\cos(\theta)r(-\sin(\theta)) + 2r\sin(\theta)r\cos(\theta) = 0. \end{aligned}$$

A fent megfogalmazott Tételek csak egy-egy lehetséges formái a láncszabálynak. Általános esetben a külső és belső függvények fajtái változhatnak.

1.3.7. Implicit függvény tétel

Példa feladat: Adott a síkban egy görbe, melyet az $F(x,y) = 0$ implicit alakú függvény ír le. Adott a görbének egy pontja (x_0, y_0), ahol $F(x_0, y_0) = 0$. A pont környezetében keressük a görbét megadó függvény explicit alakját. Egy olyan $y = f(x)$ függvényt keresünk, melyre $F(x, f(x)) = 0$ és $f(x_0) = y_0$.

1.3.10. Tétel. *(Implicit függvény tétel) Tegyük fel, hogy az F kétváltozós függvény differenciálható (x_0, y_0) egy környezetében, és ebben a pontban*

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

Ezen felül feltesszük, hogy $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ (azaz az érintősík "ferde"). Ekkor létezik egy kétdimenziós intervallum,

$$I = I_1 \times I_2 = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha) \times (y_0 - \beta, y_0 + \beta),$$

hogy minden $x \epsilon I_1$ esetén az $F(x, y) = 0$ egyenletnek pontosan egy $y = f(x)$ megoldása van, és $y \epsilon I_2$. Tehát létezik egy

$$f : I_1 \to I_2$$

valós függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $f(x_0) = y_0$.
- $f(x) \epsilon I_2$, $\forall x \epsilon I_1$.
- $F(x, f(x)) = 0$, $\forall x \epsilon I_1$.
- $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, $\forall x \epsilon I_1$.

Továbbá f differenciálható I_1-ben, és deriváltja így számolható:

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Megjegyzés. Az implicit függvény tétel a görbe *lokális tulajdonság*át fogalmazza meg. Másrészt csak egzisztenciáról van szó, tehát annyit állít a Tétel, hogy *létezik* a megfelelő függvény, de nem adja meg a konstrukciót.

A Tételt nem bizonyítjuk. Ha már tudjuk, hogy f differenciálható, akkor deriváltja kiszámolható. Deriváljuk az $F(x, f(x)) = 0$ egyenletet x szerint:

$$F'_x(x, f(x)) \cdot 1 + F'_y(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0, \tag{1.4}$$

ahonnan a Tétel utolsó állítása következik.

Megjegyzés. Az (1.4) összefüggés újabb deriválásával f magasabb rendű deriváltjait is ki tudjuk fejezni. Például a második derivált:

$$F''_{xx}(x, f(x)) + F''_{yx}(x, f(x))f'(x) + F''_{xy}(x, f(x))f'(x)+$$

$$+F''_{yy}(x, f(x))(f'(x))^2 + F''_{yy}(x, f(x))f''(x) = 0.$$

Ebből pedig $f''(x)$ kifejezhető.

Példa. Tekintsük az

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

egyenlet megoldását. Ha ebből explicit módon megpróbáljuk az y-t kifejezni:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2},$$

ami nem egyértelmű. Konkrét (x_0, y_0) esetén az implicit függvény segítségével a körívnek azt a darabját kapjuk meg, ahol az adott pont szerepel. Három eset lehetséges.

1. Ha $x_0 \epsilon (-1, 1)$ és $y_0 > 0$, akkor a megoldásfügvény $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
2. Ha $x_0 \epsilon (-1, 1)$ és $y_0 < 0$, akkor a megoldásfügvény $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.
3. Ha $x_0 = \pm 1$, akkor $y_0 = 0$. Ekkor $F'_y(x_0, 0) = 0$, és valóban, a megoldás nem folytatható.

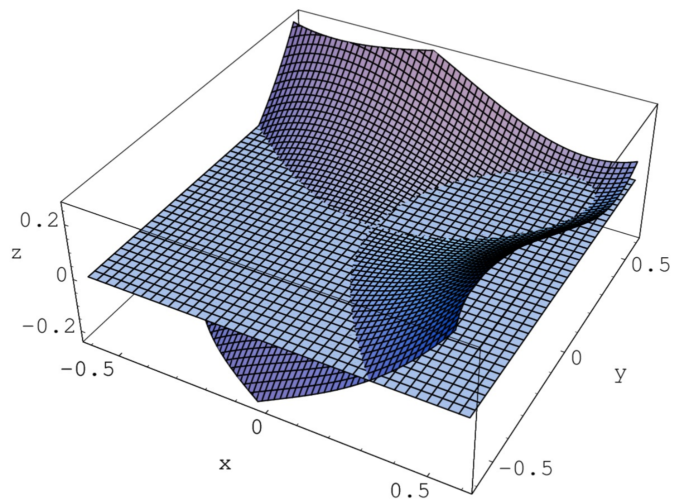
Példa. Tekintsük a Descartes-féle görbét, amelyet az alábbi egyenlet ad meg:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

ahol $a > 0$ egy valós paraméter.

A parciális deriváltakat kiszámolva azt kapjuk, hogy

$$F'_x(x, y) = 3x^2 - 3ay, \qquad F'_y(x, y) = 3y^2 - 3ax.$$



1.12. ábra. A Déscartes-görbe a $z = F(x, y)$ felület és az (x, y) sík metszete.

Vagyis $F'_x(0,0) = F'_y(0,0) = 0$, a $(0,0)$ környezetében tehát nem folytatható (nem egyértelmű) a megoldás. Bármely más pont a görbén alkalmas kiindulási pontnak. Látható, hogy van olyan x, amihez 1, illetve van olyan, amihez 3 megfelelő y tartozik. Deriváltja:

$$f'(x,y) = -\frac{3x^2 - 3ay}{3y^2 - 3ax} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax} = \frac{af(x) - x^2}{f^2(x) - ax}$$

1.4. Általánosítás $\mathbb{R}^n$-re

1.4.1. Parciális derivált, teljes derivált

1.4.1. Definíció. *Legyen* $S \subset \mathbb{R}^n$ *egy tartomány,* $x = (x_1, \ldots, x_n) \epsilon$ int$S$*egy belső pont. Az i-dik változó szerinti parciális deriváltat így értelmezzük:*

$$f'_{x_i}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \lim_{\xi \to x_i} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1} \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{\xi - x_i},$$

feltéve, hogy a fenti határtérték létezik és véges.

Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ egy tartomány. Adott egy $f: S \to \mathbb{R}$ n-változós valós függvény.

1.4.2. Definíció. *Legyen x belső pontja S-nek. Az f függvény differenciálható x-ben, ha elegendően kicsi $\Delta x = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ megváltozás esetén, melyre $x + \Delta x \epsilon S$, teljesül az alábbi összefüggés:*

$$f(x + \Delta x) = f(x) + A \cdot \Delta x + o(\|\Delta x\|), \tag{1.5}$$

ahol $A \epsilon \mathbb{R}^n$ független Δx-től, $\|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

A kétváltozós esethez hasonlóan igazolhatóak az alábbi állítások:

1.4.1. Tétel. *Ha f differenciálható egy $a \epsilon S$ belső pontban, akkor az (1.5) képletben szereplő konstans vektor a parciális deriváltakból áll:*

$$A = (f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a)) = \text{grad } f(a).$$

1.4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy az f függvény parciális derivált függvényei léteznek és folytonosak egy adott x pontban. Ekkor f teljesen differenciálható.*

1.4.3. Definíció. *Tegyük fel, hogy az f függvény parciális derivált függvényei differenciálhatóak. Ebben az esetben a második derivált, a Hesse mátrix, olyan $n \times n$ dimenziós mátrix, melynek (i, j)-dik eleme:*

$$H_{ij}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

1.4.2. Iránymenti derivált

1.4.4. Definíció. *Legyen adott az $f: S \to \mathbb{R}$ függvény, $x \epsilon \operatorname{int} S$ belső pontja S-nek. Adott egy v irány, $v = (v_1, \ldots, v_n) \epsilon \mathbb{R}^n$, mely egységnyi hosszú vektor,*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2} = 1.$$

Ekkor az f függvény v irányú deriváltja

$$D_v f(x) := \lim_{\varrho \to 0} \frac{f(x + \varrho v) - f(x)}{\varrho},$$

ha a fenti határérték létezik és véges.

1.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy f teljesen differenciálható x-ben. Ekkor minden v irányban létezik $D_v f(x)$ és*

$$D_v f(x) = v_1 f'_{x_1}(x) + \ldots + v_n f'_{x_n}(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i f'_{x_i}(x).$$

1.4.3. Összetett függvény

Legyen $f(u_1, \ldots, u_n)$ n-változós függvény, és adottak a $\phi_1(x, y), \ldots, \phi_n(x, y)$ kétváltozós függvények közös $D_{\phi_i} = R \subset \mathbb{R}^2$ értelmezési tartománnyal.

Az összetett függvény kétváltozós függvény, amely így írható:

$$F(x, y) = f(\phi_1(x, y), \ldots \phi_n(x, y)).$$

Ha f és ϕ_i, $i = 1, \ldots, n$ differenciálhatóak, akkor F is differenciálható, és

$$F'_x(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\phi_1(x, y), \ldots \phi_n(x, y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial x}(x, y).$$

$$F'_y(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial u_i}(\phi_1(x, y), \ldots \phi_n(x, y)) \frac{\partial \phi_i}{\partial y}(x, y).$$

1.5. Szélsőérték számítás

Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $S \subset \mathbb{R}^2$.

1.5.1. Definíció. *$(x_0, y_0)\epsilon S$ lokális maximum (ill. minimum), ha létezik a pontnak olyan U környezete, hogy minden $(x, y)\epsilon U \cap D_f$-re*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad (\textit{ill. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Megjegyzés. (x_0, y_0) lehet az értelmezési tartomány határpontja.

1.5.2. Definíció. *(x_0, y_0) globális maximum (ill. minimum), ha minden $(x, y)\epsilon D_f$ esetén*

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \qquad (\textit{ill. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Megjegyzés. A Weierstrass tételből következik, hogy ha S korlátos és zárt tartomány, akkor biztosan létezik globális minimum és maximum.

Példa. Tekintsük az $f(x, y) = x^2+y^2$ függvényt az $S = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ tartományon. A függvény globális maximumhelyei a $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ körvonal pontjai, és egyetlen globális minimumhelye a $(0, 0)$ pont.

1.5.1. Tétel. *(Szükséges feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az f függvénynek (x_0, y_0)-ban lokális szélsőértéke van, és tegyük fel, hogy a függvény itt differenciálható. Ekkor*

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = (0, 0),$$

azaz $f'_x(x_0, y_0) = 0$,és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Bizonyítás. Jelölje $f_1(x) = f(x, y_0)$ a kétváltozós függvény egyik metszetfüggvényét. Ekkor x_0 lokális szélsőértéke f_1-nek, ezért $f'_1(x_0) = 0$. Másrészt $f'_1(x) = f'_x(x, y_0)$, ebből a Tétel állítása küvetkezik.

1.5.3. Definíció. *Ha* grad $f(x_0, y_0) = (0, 0)$, *akkor (x_0, y_0) stacionárius (vagy kritikus) pont. Ha nincs itt szélsőérték, akkor ezt nyeregpontnak hívjuk.*

Példa. A fenti tételben szereplő feltétel valóban csak szükséges, mint ez a következő példából is látszik. Legyen

$$f(x,y) = xy, \qquad (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2.$$

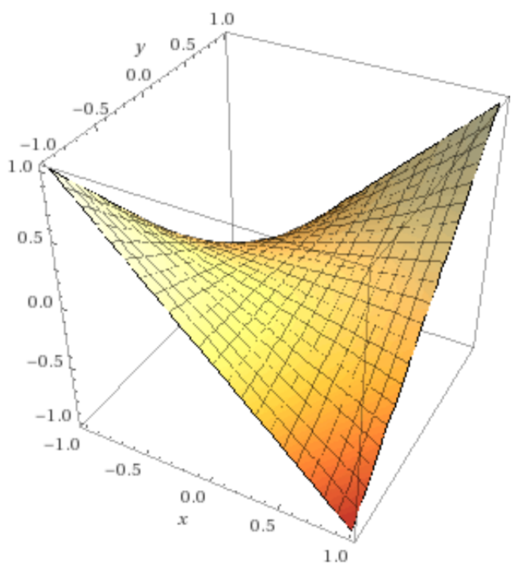
Parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y) = y, \qquad f'_y(x,y) = x.$$

A $(0,0)$-ban mindkét parciális deriváltja eltűnik, azaz

$$f'_x(0,0) = 0, \qquad f'_y(0,0) = 0,$$

mégis ez a pont nem szélsőérték. Ez onnan is látható, hogy a függvény előjele az 1. és 3. síknegyedben pozitív, a 2. és 4. síknegyedben negatív. Ezért az origó bármely környezetében van a függvénynek pozitív és negatív értéke is.



1.13. ábra. Az $f(x,y) = xy$ felülete az origó közelében.

Példa. Határozzuk meg, hogy milyen háromszög esetén lesz a szögek sinusainak a szorzata maximális. Ha a háromszög két szöge x és y, akkor a harmadik szög $\pi - x - y$. Így a minimalizálandó függvény $f : [0,\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$.:

$$f(x,y) = \sin x \sin y \sin(\pi - x - y) = \sin x \sin y \sin(x+y).$$

Előzetesen megállapíthatjuk, hogy ha $0 < x,\ y < \pi$, akkor $f(x,y) > 0$, egyébként a határon $f(x,y) = 0$. Ezért D_f belsejében f pozitív, a ∂D_f-en az $f = 0$. Tehát a függvény maximuma létezik (mivel D_f korlátos és zárt) és belső pontban van.

Meghatározzuk a stacionárius pontokat.

$$f'_x(x,y) = \cos x \sin y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0,$$

$$f'_y(x,y) = \sin x \cos y \sin(x+y) + \sin x \sin y \cos(x+y) = 0.$$

A fenti egyenleteket egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $\tan y = \tan x$, vagyis a stacionárius pontban $x = y$. Ezt visszahelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\cos x \sin x \sin 2x + \sin^2 x \cos 2x = 0,$$

amiből trigonometrikus azonosságok felhasználásával, és $\sin x \neq 0$ miatt:

$$\cos x \sin 2x + \sin x \cos 2x = \sin 3x = 0$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy

$$x = y = \frac{\pi}{3},$$

tehát a háromszög egyenlő oldalú.

1.5.2. Tétel. *(Elégséges feltétel a szélsőérték létezésére) Tegyük fel, hogy az (x_0, y_0) pont stacionárius pontja f-nek, és itt f kétszer differenciálható. Ha ebben a pontban*

$$f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy})^2(x_0,y_0) > 0,$$

akkor a pontban lokális szélsőérték van. Ha emellett $f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$, akkor lokális minimum, ha $f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$, akkor lokális maximum. Ha

$$f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy})^2(x_0,y_0) < 0,$$

akkor nincs szélsőérték. Ha pedig

$$f''_{xx}(x_0,y_0) f''_{yy}(x_0,y_0) - (f''_{xy})^2(x_0,y_0) = 0,$$

akkor a szélsőérték eldöntéséhez további vizsgálat szükséges.

Azt a stacionárius pontot, ahol nincs szélsőérték, *nyeregpont*-nak nevezzük.

1.5.3. Tétel. *(Az előző tétel átfogalmazása.) Tegyük fel, hogy (x_0, y_0) egy stacionárius pontja f-nek. Ekkor ha a $H(x_0, y_0)$ Hesse mátrix*

- *pozitív definit, akkor itt a függvénynek lokális minimuma van,*
- *negatív definit, akkor lokális maximuma van,*
- *indefinit, akkor nincs szélsőértéke,*
- *szemidefinit, akkor lehet, hogy lokális szélsőértéke van, és lehet, hogy nincs.*

A Tételeket nem bizonyítjuk.

Példaként tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat. Nyilván $A > 0$ (pozitív definit), $B < 0$ (negatív definit) és C indefinit.

Speciális esetként vizsgáljuk meg, hogy $n = 2$-re mit jelent a definitség.

1.5.1. Állítás. *Legyen $H_0 = H(x_0, y_0)$ egy kétváltozós függvény Hesse mátrixa az (x_0, y_0) pontban, azaz*

$$H_0 = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{yx}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Ekkor

1. $H_0 > 0 \iff \det\,(H_0) > 0$ *és* $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$
2. $H_0 < 0 \iff \det\,(H_0) > 0$ *és* $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$

3. H_0 *indefinit* $\iff \quad \det\,(H_0) < 0$

4. $H_0 \leq 0$ *vagy* $H_0 \geq 0 \quad \iff \quad det(H_0) = 0$

Megjegyzés. A fenti Állítás 1. és 2. pontjában $f''_{yy}(x_0, y_0)$-ra vonatkozó feltétel is írható.

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2,$$

értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$. Lokális szélsőérték meghatározáshoz számoljuk ki a gradiensét:

$$f'_x(x, y) = 2x - 3y, \qquad f'_y(x, y) = -3x + 2y.$$

A gradiens-vektor egyetlen pontban tűnik el, ez a $(0, 0)$ pont. A Hesse mátrix minden pontban ugyanaz:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{yx}(x, y) \\ \\ f''_{xy}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel $\det\ H = -5 < 0$, ezért a mátrix indefinit, tehát a függvénynek nincs lokális szélsőértéke.

Példa. Legyen

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y,$$

értelmezési tartománya $\mathbb{R}^2$. A stacionárius pontokat meghatározó egyenletrendszer

$$f'_x(x, y) = 2x + y + 1 = 0, \qquad f'_y(x, y) = x + 2y + 1 = 0,$$

ennek egyetlen megoldása, mint lehetséges szélsőérték

$$(x_0, y_0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}).$$

A második deriváltak konstansok:

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \qquad f''_{yy}(x, y) = 2, \qquad f''_{xy}(x, y) = 1.$$

A Hesse mátrix

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitív definit, ezért a stacionárius pont lokális minimum.

1.6. Feltételes szélsőérték

Minta feladat: Legyen adott $\mathbb{R}^2$-ben egy $\phi(x,y) = 0$ görbe. Meg szeretnénk határozni, hogy a görbe melyik pontja van az origóhoz a legközelebb. Más szóval határozzuk meg a

$$\min(x^2 + y^2)$$

értékét, ahol a változók nem függetlenek, hanem fennáll a $\phi(x,y) = 0$ összefüggés. Első megoldásként a $\phi(x,y) = 0$ alakból explicit módon kifejezzük az egyik változót: $y = F(x)$, és minimalizáljuk az

$$x^2 + (F(x))^2, \qquad x \epsilon D_F$$

kétváltozós függvényt. Ennek hátránya, hogy egyrészt egyáltalán nem biztos, hogy explicit megoldás létezik, másrészt önkényesen részesítjük előnyben az egyik változót. Második megoldásként közvetlenül optimalizálunk. Ez azt jelenti, hogy az $f(x,y) = x^2 + y^2$ függvény megszorítását tekintjük az

$$\{(x,y): \ \phi(x,y) = 0\}$$

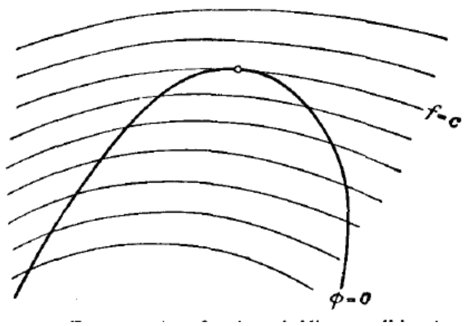
halmazon, és itt keressük a szélsőértéket. A gondot az okozza, hogy a fenti halmaznak általában nincs belső pontja, tehát a korábbi fejezet tételeit nem alkalmazhatjuk.

A feltétles optimalizálás feladatát a következőképpen értelmezzük.

1.6.1. Definíció. *Legyen adott az $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós differenciálható függvény. Ennek tekintjük megszorítását egy olyan halmazon, melyet egy implicit függvény ad meg, ahol a $\phi(x,y) = 0$ összefüggés teljesül. Tömören a feladat tehát:*

$$\min_{\{(x,y): \ \phi(x,y)=0\}} f(x,y). \tag{1.6}$$

A szükséges feltétel előtt lássuk szemléletesen, hogy mit várhatunk. Képzeljünk el egy olyan ábrát, ahol egyszerre látható a $\phi(x, y) = 0$ feltétel, és az $f(x, y) = c$ szintvonalak, különböző c értékek mellett.



1.14. ábra. Az $f = c$ szintvonalak és a $\phi = 0$ szintvonal egyszerre

Amely c-re van közös pont, ott van megoldása az egyenletrendszernek:

$$\phi(x, y) = 0, \qquad f(x, y) = c.$$

Mivel f folytonos (hiszen differenciálható), ezért a szintvonalak is monoton módon változnak. Így azt a szintvonalat keressük, ami "utoljára" metszi a $\phi(x, y) = 0$ görbét. Ebben a pontban görbék érintik egymást, az érintők megegyeznek, azaz

$$\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)} = \frac{\phi'_x(x, y)}{\phi'_y(x, y)}.$$

Ezt a képletet az implicit függvény deriválásakor láttuk. Egy kicsit másképp átrendezve azt kapjuk, hogy van egy olyan λ valós szám, melyre

$$\frac{f'_x(x, y)}{\phi'_x(x, y)} = \frac{f'_y(x, y)}{\phi'_y(x, y)} = \lambda.$$

Tehát szemléletesen azt várjuk, hogy ha (x, y) feltételes szélsőérték, akkor létezik olyan λ, melyre teljesül:

$$f'_x(x, y) - \lambda \phi'_x(x, y) = 0,$$

$$f'_y(x, y) - \lambda \phi'_y(x, y) = 0.$$

Erről szól a következő tétel, melyet nem bizonyítunk.

1.6.1. Tétel. *(Szükséges feltétel feltételes szélsőértékre) Tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ és $\phi(x,y)$ függvények differenciálhatók, és (x_0,y_0) pont a (1.6) feltételes optimalizálás megoldása. Tegyük fel, hogy* grad $\phi(x_0,y_0) \neq (0,0)$. *Ekkor létezik olyan $\lambda_0 \epsilon \mathbb{R}$ konstans, melyre*

$$f'_x(x_0,y_0) - \lambda_0 \phi'_x(x_0,y_0) = 0,$$

$$f'_y(x_0,y_0) - \lambda_0 \phi'_y(x_0,y_0) = 0.$$

A fenti tételt átfogalmazva kimondjuk a *Lagrange-féle multiplikátor szabály*t. *Definiáljuk az $F : D_f \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvényt:*

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\phi(x,y).$$

Ha (x_0,y_0) megoldása a feltételes szélsőérték feladatnak, akkor van olyan λ_0, melyre (x_0,y_0,λ_0) stacionárius pontja $F(x,y,\lambda)$-nak.

Tekinsük az alábbi feltételes optimalizálási feladatot:

$$\min_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x,y) \qquad \text{vagy} \qquad \max_{\{\phi(x,y)=0\}} f(x,y).$$

Ehelyett tekinthetjük az

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\phi(x,y), \qquad (x,y)\epsilon D_f, \lambda\epsilon\mathbb{R}$$

függvény *feltétel nélküli* szélsőérték feladatát.

Fontos hangsúlyozni, hogy a fenti Lagrange-féle multiplikátor szabály csak *szükséges* feltételt ad a feltételes szélsőérték helyére. Tehát az F függvény stacionárius pontja lehetséges feltételes szélsőérték, és minden esetben további meggondolás szükséges.

Példa. Legyen $f(x,y) = xy$, és ennek szeretnénk meghatározni feltételes szélsőértékét az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ görbe mentén. (A görbe mentén nincs belső pont!). Alkalmazzuk a Lagrange-féle multiplikátor szabályt. Eszerint az alábbi függvény stacionárius pontjait keressük:

$$F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Megjegyezzük, hogy az $x^2 + y^2 - 1 = 0$ feltételből adódó halmaz korlátos és zárt, tehát biztosan létezik szélsőérték. A függvényértékek nagyságrendjére egy előzetes becslést kaphatunk a számtani-mértani közép közti összefüggés alkalmazásával, hiszen

$$\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = |xy|.$$

Emiatt a feltételi halmazon

$$|f(x,y)| \leq \frac{1}{2},$$

azaz

$$-\frac{1}{2} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}. \tag{1.7}$$

A Lagrange függvény gradiense:

$$\begin{aligned} F'_x(x,y,\lambda) &= y - 2\lambda x, \\ F'_y(x,y,\lambda) &= x - 2\lambda y, \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) &= -(x^2+y^2-1). \end{aligned}$$

A grad $F(x,y,\lambda) = 0$ egyenletrendszer megoldásaként ez adódik:

$$\lambda_1 = 0.5, \qquad \text{vagy} \qquad \lambda_2 = -0.5.$$

Így visszahelyettesítve a λ-kat négy stacionárius pontot kapunk:

$$(x_1,y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad (x_2,y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),$$

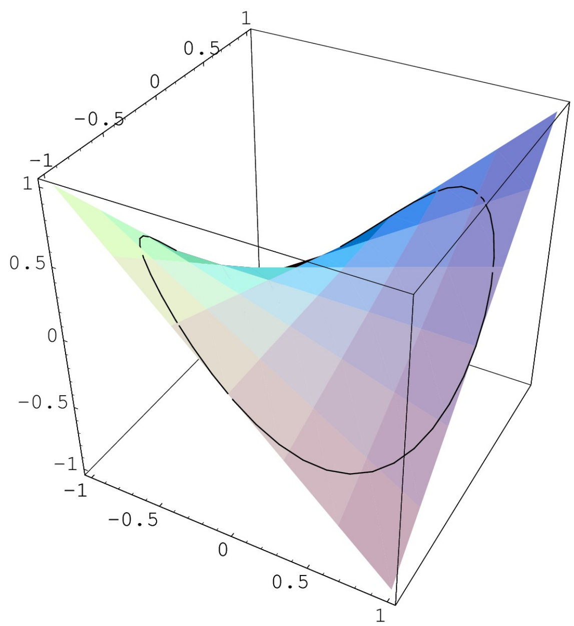
$$(x_3,y_3) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \qquad (x_4,y_4) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

A megfelelő függvényértékek:

$$f(x_1,y_1) = 0.5, \qquad f(x_2,y_2) = 0.5,$$

$$f(x_3,y_3) = -0.5, \qquad f(x_4,y_4) = -0.5.$$

A (1.7) összefüggést felhasználva azt kapjuk, hogy $f(x_1,y_1)$ és $f(x_2,y_2)$ globális maximumok, $f(x_3,y_3)$ és $f(x_4,y_4)$ pedig globális minimumok.



1.15. ábra. Példa feltételes szélsőérték számításra.

1.7. Függvényrendszerek

Ebben a fejezetben egyszerre több függvényt tekintünk. Speciálisan, a függvények száma megegyezik a változók számával. $R \subset \mathbb{R}^2$ egy tartomány, ahol adott két valós függvény, $\Phi, \Psi : R \to \mathbb{R}$. A függvényrendszer amit tekintünk:

$$\begin{aligned} \xi &= \Phi(x,y) \\ \eta &= \Psi(x,y). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ezt úgy értelmezzük, mint $\mathbb{R}^2$ térbeli leképezés, mely az (x,y) ponthoz a $(\xi,\eta) = F(x,y)$ pontot rendeli hozzá. Ezt a $F : R \to \mathbb{R}^2$ leképezést szokás *vektormezőnek* is nevezni.

Példa. Az affin leképezést így definiáljuk:

$$\begin{aligned} \xi &= ax + by \\ \eta &= cx + dy. \end{aligned}$$

Ezzel már korábban találkoztunk, mint $\mathbb{R}^2$-beli lineáris leképezés. Tömören így írhatjuk:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1.7.1. Invertálhatóság

Függvényrendszerekkel kapcsolatosan felmerülő első kérdés, hogy vajon - mint egy $\mathbb{R}^2$-beli leképezés - invertálható-e? Legyen B a képtér:

$$B = \{(\xi, \eta) : \ \xi = \Phi(x, y), \eta = \Psi(x, y)) : (x, y) \epsilon R\}.$$

Tegyük fel, hogy a leképezés injektív, azaz különböző R-beli pontokhoz a képtérben különböző (ξ, η) pontok tartoznak. Ekkor a (1.8) rendszer *invertálható*. Az inverz rendszer ilyen alakú lesz:

$$\begin{aligned} x &= g(\xi, \eta) \\ y &= h(\xi, \eta). \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.7.2. Az inverz leképezés differenciálhatósága

Tegyük fel, hogy a kiinduló (1.8) rendszer függvényei és az inverz (1.9) rendszer függvényei is differenciálhatók.

1.7.1. Definíció. *A (1.8) rendszer tartozó Jacobi mátrixát így definiáljuk:*

$$\mathcal{J}(x, y) := \begin{pmatrix} \Phi'_x(x, y) & \Phi'_y(x, y) \\ & \\ \Psi'_x(x, y) & \Psi'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } \Phi(x, y) \\ \\ \text{grad } \Psi(x, y) \end{pmatrix}.$$

A fenti mátrix determinánsát Jacobi determinánsnak hívjuk:

$$D(x, y) := \det \mathcal{J}(x, y) = \Phi'_x(x, y)\Psi'_y(x, y) - \Psi'_x(x, y)\Phi'_y(x, y).$$

A Jacobi determinánst szokás így is jelölni:

$$D(x,y) = \frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)}.$$

Megjegyezzük, hogy ez valóban csak formális jelölés.

Az inverz rendszer Jacobi mátrixát így jelöljük:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) := \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi,\eta) & g'_\eta(\xi,\eta) \\ \\ h'_\xi(\xi,\eta) & h'_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

1.7.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a Jacobi determináns nem* 0*, azaz az (1.8) rendszer Jacobi mátrixa nem szinguláris az ÉT egy* (x_0,y_0) *belső pontjában. Ekkor az* (x_0,y_0) *egy környezetében a vektormező invertálható. Továbbá, az inverz rendszer Jacobi mátrixa így számítható:*

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = (\mathcal{J}(x,y))^{-1},$$

ahol (x,y) *és* (ξ,η) *egymás képei.*

Speciálisan, az inverz függvényrendszer Jacobi determinánsa reciproka az eredeti függvényrendszer Jacobi determinánsnak:

$$\frac{d(\xi,\eta)}{d(x,y)} = \frac{1}{\frac{d(x,y)}{d(\xi,\eta)}}.$$

Bizonyítás. A (1.9) egyenleteket (1.8)-be helyettesítve az alábbi azonosságokat kapjuk:

$$\xi = \Phi(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)) \tag{1.10}$$

$$\eta = \Psi(g(\xi,\eta), h(\xi,\eta)) \tag{1.11}$$

Mivel feltettük, hogy g és h is differenciálhatóak, ezért deriválhatjuk a fenti azonosságokat ξ és η szerint.

Deriváljuk mindkét egyenletet ξ szerint, majd η szerint. Az áttekinthetőbb jelölés kedvéért az argumentumokat nem írjuk ki. Ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi'_x g'_\xi + \Phi'_y h'_\xi \qquad (1.12) \\ 0 &= \Psi'_x g'_\xi + \Psi'_y h'_\xi \qquad (1.13) \\ 0 &= \Phi'_x g'_\eta + \Phi'_y h'_\eta \\ 1 &= \Psi'_x g'_\eta + \Psi'_y h'_\eta \end{aligned}$$

A (1.12) egyenletet szorozzuk meg Ψ'_x-vel, és a (1.13) egyenletet szorozzuk meg Φ'_x-vel, majd vonjuk ki egymásból az egyenleteket. Azt kapjuk, hogy

$$h'_\xi = \frac{\Psi'_x}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk a többi deriváltat is:

$$\begin{aligned} g'_\xi &= \frac{\Psi'_y}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}, \\ h'_\eta &= \frac{\Phi'_x}{\Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x}, \\ g'_\eta &= \frac{\Phi'_y}{\Phi'_y \Psi'_x - \Phi'_x \Psi'_y}. \end{aligned}$$

Vezessük be azt a jelölést, hogy

$$D = \Phi'_x \Psi'_y - \Phi'_y \Psi'_x.$$

Ekkor a fenti képletek röviden így írhatók:

$$g'_\xi = \frac{\Psi'_y}{D}, \qquad g'_\eta = -\frac{\Phi'_y}{D}, \qquad h'_\xi = -\frac{\Psi'_x}{D}, \qquad h'_\eta = \frac{\Phi'_x}{D}. \qquad (1.14)$$

Az inverz függvény deriváltjára vonatkozó képletek könnyebb memorizálása érdekében vegyük észre az egydimenziós esettel való analógiát. Ha f egyváltozós differenciálható függvény, melynek deriváltja nem 0, akkor inverzének deriváltja így írható:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \qquad y = f(x).$$

Most a kétváltozós függvényrendszer ilyen alakú:

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} : R \to S,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \Phi'_x(x,y) & \Phi'_y(x,y) \\ \\ \Psi'_x(x,y) & \Psi'_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Az inverzfüggvény

$$\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} : S \to R,$$

és ennek derivált-mátrixa:

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} g'_\xi(\xi,\eta) & g'_\eta(\xi,\eta) \\ \\ h'_\xi(\xi,\eta) & h'_\eta(\xi,\eta) \end{pmatrix}.$$

Emlékeztetünk arra, hogy 2×2 mátrix inverzét hogyan számoljuk ki:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Példa. Tekintsük a polárkoordináták esetét a felső félsíkban, kivéve az origót. Ekkor a függvényrendszer:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\quad = \Phi(x,y) \ )$$

$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\quad = \Psi(x,y). \ )$$

Ennek Jacobi mátrixa:

$$\mathcal{J}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \\ \dfrac{-y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Ezért a Jacobi determináns:

$$D = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}.$$

Az inverz rendszer

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \quad (\ = g(r,\theta) \ ) \\ y &= r\sin\theta \quad (\ = h(r,\theta) \ ) \end{aligned}$$

Az inverz rendszer Jacobi mátrixa

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\theta \\ h'_r & h'_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & r(-\sin\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ennek determinánsa

$$\det\,(\mathcal{K}) = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Számoljuk ki a $\mathcal{J}^{-1}$ inverz mátrixot:

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{1}{\det\,\mathcal{J}} \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & -y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{K}.$$

1.8. Kitekintés n dimenzióra

1.8.1. Szélsőérték

1.8.1. Tétel. *Legyen f n-változós differenciálható függvény, $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ha az értelmezési tartomány $x_0 \epsilon\ \mathrm{int}(S)$ belső pontjában lokális szélsőértéke van a függvénynek, akkor* $\mathrm{grad}\ f(x_0) = 0$.

1.8.2. Tétel. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ tartomány. $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós függvény, kétszer differenciálható az $x_0 \epsilon \operatorname{int}(S)$ pontban. Tegyük fel, hogy* $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$. *(Ez a szükséges feltétel). Jelölje H a pontbeli Hesse mátrixot, melynek (i,j)-dik eleme*

$$H_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0)$$

1. *Ha $H > 0$, azaz pozitív definit, akkor x_0 lokális minimum,*
2. *Ha $H < 0$, azaz negatív definiy, akkor x_0 lokális maximum,*
3. *Ha H indefinit, akkor nincs szélsőérték,*
4. *Ha H szemidefinit, akkor további vizsgálat szükséges.*

Emlékeztető: Az A $n \times n$-es szimmetrikus mátrix pozitív (negatív) definit, ha minden $x \epsilon \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ esetén $x^T A x > 0$ (< 0). Ezt úgy jelöljük, hogy $A > 0$, $(A < 0)$. Ha létezik $x \epsilon \mathbb{R}^n$, melyre $x^T A x > 0$ és létezik $y \epsilon \mathbb{R}^n$,hogy $y^T A y < 0$, akkor a mátrix indefinit.

1.8.2. Lagrange-féle középértéktétel n dimenzióban

1.8.3. Tétel. *Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ olyan n-változós függvény, mely differenciálható valamely rögzített $x \epsilon S$ egy U környezetében. Legyen $h \epsilon \mathbb{R}^n$ olyan megváltozás, melyre $(x+h) \epsilon U$. Ekkor létezik $\theta \epsilon (0,1)$:*

$$f(x+h) - f(x) = \operatorname{grad} f(x+\theta h) \cdot h = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\xi_x) h_i,$$

ahol $\xi_x = x + \theta h$ és $0 < \theta < 1$.

Megjegyezzük, hogy a fenti tételben $\operatorname{grad} f(x+\theta h)$ sorvektor, h pedig oszlopvektor. A képletben szereplő $\cdot$ skaláris szorzást jelöl.

Bizonyítás. Vezessük be az alábbi egyváltozós függvényt:

$$F(t) := f(x+th) = f(x_1 + th_1, \ldots, x_n + th_n).$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenciálható valós függvény, továbbá $F(0) = f(x)$ és $F(1) = f(x+h)$. Erre a függvényre alkalmazzuk az egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt. Eszerint létezik $\theta\epsilon(0,1)$, melyre:

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \cdot 1.$$

Mivel a láncszabály alkalmazásával rögzített t-re

$$F'(t) = f'_{x_1}(x+th)\ h_1 + \ldots + f'_{x_n}(x+th)\ h_n,$$

ezért

$$F'(\theta) = f'_{x_1}(\xi_x)\ h_1 + \ldots + f'_{x_n}(\xi_x)\ h_n, \qquad \xi_x = x + \theta h$$

és ebből az állítás következik.

1.8.1. Következmény. *Legyen $S \subset \mathbb{R}^n$ konvex tartomány (vagyis bármely két pontját összekötő szakasz is benne van S-ben), és adott ezen egy valós függvény $f : S \to \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy f differenciálható és* grad $f(x) = 0$ *minden $x\epsilon S$-re. Ekkor a függvény konstans.*

Bizonyítás. Legyen $x, x'\epsilon S$ két pont. Alkalmazzuk a fenti tételt:

$$f(x) - f(x') = \text{grad } f(x + \theta(x - x'))(x - x'),$$

valamely $\theta\epsilon(0,1)$ mellett. A konvexitás miatt $x + \theta(x - x')\epsilon S$, így

$$\text{grad } f(x + \theta(x - x')) = 0\epsilon\mathbb{R}^n,$$

ezért $f(x) = f(x')$.

Megjegyzés. A fenti állítás összefüggő tartományon értelmezett függvényre is igaz, a konvexitás nem szükséges. (*HF: Miért?*)

1.8.3. Taylor-formula

Feladat. Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, amely elegendően sokszor differenciálható valamely (x_0, y_0) pontban. Adjunk becslést az

$$f(x,y) - f(x_0,y_0)$$

különbségre az (x_0, y_0) pontbeli deriváltak felhasználásával.

A fenti feladatra egy megoldást az érintő sík alapján tudunk adni, eszerint

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Ez megfelel az elsőfokú Taylor-polinomnak.

Magasabb fokú Taylor polinomot úgy adjuk meg, hogy visszavezetjük a feladatot az egyváltozós esetre.

Legyen

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

ahol

$$\Delta x = x - x_0, \qquad \Delta y = y - y_0.$$

Ekkor $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ elegendően sokszor differenciálható valós függvény, $F(0) = f(x_0, y_0)$, $F(1) = f(x, y)$. Az F függvény $t = 0$ pont körüli Taylor-formuláját fogjuk használni. Ehhez szükségünk lesz a deriváltakra:

$$\begin{aligned}
F(0) &= f(x_0,y_0) \\
F'(t) &= f'_x(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta y \\
F''(t) &= f''_{xx}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\Delta x\Delta y + \\
&+ f''_{yy}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)(\Delta y)^2.
\end{aligned}$$

Ha feltesszük, hogy $F(t)$ n-szer differenciálható, akkor indukcióval belátható, hogy:

$$F^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)\ (\Delta x)^k (\Delta y)^{n-k}.$$

A Taylor formula alapján ezt kapjuk:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = F(1) - F(0) =$$

$$= (f'_x\Delta x + f'_y\Delta y) + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\Delta x)^k(\Delta y)^{n-k}\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}(x_0,y_0) + L_n,$$

ahol L_n a Lagrange-féle maradéktag.

Speciálisan $n = 2$ esetén kiírjuk pontosan a tagokat:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \text{grad } f(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(\Delta x,\ \Delta y)\cdot H(x_0,y_0)\cdot\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} + L_2,$$

ahol $H(x_0, y_0)$ a Hesse-mátrix.

Általános másodrendű Taylor-formula. Legyen f n-változós, kétszer differenciálható függvény S-ben, $S \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor tetszőleges x, $(x+h)\epsilon S$ esetén

$$f(x+h) = f(x) + \text{grad } f(x)\cdot h + L_1,$$

ahol

$$h^T = (h_1, \ldots, h_n), \qquad \text{grad } f(x) = (f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_n}),$$

továbbá a Lagrange-féle maradéktag így írható:

$$L_1 = \frac{1}{2}h^T\left(\int_0^1 (1-t)\ H(x+th)\ dt\right)h.$$