Fourier transzformáció 2. rész.

2021. április 28.

A Fourier transzformáció előfeltételei

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ esetén $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.
3. f abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

FT és inverz FT. Ismétlés.

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teljesíti az *1.-2.-3.* feltételeket.

$$f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \widehat{f}(s).$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \longleftrightarrow \quad \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Fourier transzformáció – Inverz Fourier transzformáció:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai

1. *Linearitás*:
   $\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s)$, $\mathcal{F}(f+g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s)$.

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.

3. (*Átskálázás*) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.

4. (Idő megfordítása)

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s).$$

$4.^{+}$ (*Átskálázás, általános eset*) Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai, folytatás

5. (Idő eltolás)

$$\mathcal{F}(f(x-x_0),s)=e^{-ix_0 s}\mathcal{F}(f(x),s).$$

6. (Frekvencia eltolás)

$$\mathcal{F}(e^{ikx}f(x),s)=\mathcal{F}(f(x),s-k).$$

$$\mathcal{F}(e^{ikx}f(x),s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx}f(x)e^{-isx}dx=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(s-k)x}dx.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai, összefoglalás

1. *Linearitás*:
   $\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s)$, $\mathcal{F}(f + g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s)$.
2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.
3. (Átskálázás) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.
4. (Idő megfordítása) $\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s)$.
5. (Idő eltolás)

$$\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s}\mathcal{F}(f(x), s).$$

6. (Frekvencia eltolás)

$$\mathcal{F}(e^{ikx} f(x), s) = \mathcal{F}(f(x), s - k).$$

Egy fontos példa

Legyen $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Mivel f páros, ezért

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(sx)dx.$$

$$g(s) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\cos(sx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(sx)dx.$$

Deriváljunk s szerint. $g'(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}(-x)\sin(sx)\ dx = (*)$

$$(*) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[e^{-\frac{x^2}{2}} \sin(sx)\right]_0^\infty - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} s\cos(sx)\ dx = 0 - s \cdot g(s).$$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\widehat{f}(s) = g(s)$-re kapott összefüggés:

$\Longrightarrow$ DE: $\qquad g'(s) = -sg(s).$

Általános megoldása: $g(s) = ce^{-\frac{s^2}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Most $c = g(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(0x) dx = 1$. CHECK!

$g(s) = \widehat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$.

$$\mathcal{F}(e^{-\frac{x^2}{2}}, s) = e^{-\frac{s^2}{2}}$$

Ez a függvény a FT egyetlen VALóS FIXPONTja.

Parseval egyenlet

Tétel. Az 1. - 3. feltételek esetén:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds.$$

Biz.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds \; dx = \ldots$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) \widehat{f}(-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds, \quad \text{hiszen } \overline{\widehat{f}(s)} = \widehat{f}(-s)$$

.

Megjegyzés. A fenti tétel másik elnevezése *Rayleigh-féle energia törvény*. Egy jel négyzetintegrálja a fizikában az *energia*.

További tulajdonságok 1.

Állítás. A Fourier transzformált további tulajdonsága:

7. Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |x||f(x)|dx < \infty$, akkor

$$\mathcal{F}(xf(x), s) = i\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f(x), s).$$

Biz.

$$\frac{d}{ds}\mathcal{F}(f(x), s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx\right),$$

ami az *egyenletes konvergencia miatt*:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-isx}\right)'dx = -i\mathcal{F}(xf(x), s).$$

További tulajdonságok 2.

Állítás. A Fourier transzformált további tulajdonsága:

8. Ha $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty$, akkor

$$\mathcal{F}(f', s) = is \cdot \mathcal{F}(f, s).$$

BIZ. HF.

Az időtartománybeli deriválás a frekvenciatartományban egy *is* tényezővel való szorzásnak felel meg.

Konvolúció. Értelmezés

Adott két valós, *abszolút integrálható* függvény $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty.$$

Definíció. A két függvény KONVOLÚCIÓJA $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\big(f * g\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy.$$

Állítás. $f * g$ jól értelmezett, azaz :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A konvolúció alaptulajdonságai

1. $f * g$ is abszolút integrálható, és
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(f * g\right)\,(x)\right|\;dx < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx.$$
2. Kommutatív: $f * g = g * f$.
3. Asszociatív:$(f * g) * h = f * (g * h)$.
4. Disztributív tulajdonság: $(f + g) * h = f * h + g * h$.

Ezek közvetlen számolással igazolhatóak (**HF**).

Példa

$$\left(f * g\right)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [0,1] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$\left(f * g\right)(x) = \int_{0}^{1} g(x-y)dy.$$

A konvolúció hatása: a g függvény x *előtti értékeit* kiátlagolja.

Konvolúció és Fourier transzformáció

Állítás. Konvolúció hatása az időtartományban és a frekvenciatartományban:

1. $\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi}\, \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s)$,
2. $\mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}(f \cdot g, s)$.

Bizonyítás: 1.) **HF.** Jegyzetben $\surd$. 2.) Nem trivi.