Fourier analízis 2. rész.

2021. április 26.

Fourier sor. Ismétlés

f 2π szerint *periodikus* függvény, mely integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény FOURIER SORÁT így értelmeztük:

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \qquad \text{ahol}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

A Fourier sor közelítése az **n**-DIK FOURIER POLINOM:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Euler formula

Euler formula. $\forall x \in \mathbb{R}$-re:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

x helyett $-x$: $\quad \Longrightarrow \quad e^{i(-x)} = \cos(x) - i\sin(x).$

Összeadva ill. kivonva a két egyenletet

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos(x), \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin(x).$$

Ezért a trigonometrikus függvények komplex alakja:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Fourier polinom komplex alakja

Az n-dik Fourier polinom (ism.)

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx).$$

Behelyettesítjük, hogy

$$\cos(kx) = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin(kx) = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}.$$

Így azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = \ldots \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}, \qquad \alpha_k = \overline{\alpha_{-k}}.$$ Kérem kiszámolni!

Komplex Fourier polinom

Tétel. Tfh $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx}$. Ekkor az együtthatók:

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Biz. Szorozzuk meg $f(x)$-et e^{-imx}-el, és integráljunk:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-m)x} dx = \alpha_m \cdot 2\pi,$$

$$\text{u.i.} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx} dx = \begin{cases} 0 & \text{ha } j \neq 0, \\ 2\pi & \text{ha } j = 0. \end{cases}$$

Fourier sor, komplex alak

Definíció. f 2π szerint periodikus fv, integrálható $[-\pi, \pi]$-ben.

Az f függvény KOMPLEX FOURIER SORÁT így értelmezzük:

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx},$$

ahol

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Fourier sorok alaptétele, komplex alak

Tétel. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben

1. szakaszonként folytonosan differenciálható,
2. max véges sok első fajú szakadási helye van,
3. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor f előáll FS összegeként $\forall x \in [-\pi, \pi]$-ben:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Parseval egyenlőség, komplex alak

Tétel. A komplex Fourier együtthatókra:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

"*Energia megmaradás*" jellegű állítás.

Összefoglalás. Fourier sorok alaptétele

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben:

1. szakaszonként folytonosan differenciálható,
2. max véges sok első fajú szakadási helye van,
3. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

Ekkor f egy-egyértelműen megadható:

(*vagy*) két valós számsorozattal, (a_n) és (b_n), ahol

$$\sum a_n^2 < \infty, \qquad \sum b_n^2 < \infty$$

(*vagy*) egy komplex számsorozattal, (α_n), melyre

$$\sum |\alpha_n|^2 < \infty$$

A Fourier transzformáció előfeltételei

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kielégíti az alábbi feltételeket:

1. $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$ esetén $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ véges sok pontot kivéve folytonosan differenciálható.
2. az x_0 szakadási pontban $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$.
3. f abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Fourier transzformáció bevezetése

Definíció. Ha f teljesíti az *1. 2. 3.* feltételeket, akkor FOURIER TRANSZFORMÁLTJA az alábbi $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvény:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

Fourier transzformált másik jelölése

$$\mathcal{F}(f, s) = \widehat{f}(s).$$

$f(x)$: az *időtartomány*-ban adott,

$\widehat{f}(s)$ a *frekvenciatartomány*-ban adott.

Fourier transzformáció értelmezése

A FT egy *komplex* függvény improprius integrálja:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(sx) dx - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(sx)) dx.\end{aligned}$$

Belátjuk, hogy $\widehat{f}(s)$ - mint improprius integrál - jól definiált:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-isx}| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Közelebbről megvizsgáljuk. $B > 0$-ra definiáljuk:

$$\widehat{f}_B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int^{B} f(x) e^{-ixs} dx \implies \widehat{f}(s) = \lim_{B \to \infty} \widehat{f}_B(s).$$

$$\widehat{f}_B(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-B}^{B} f(x) e^{-ixs} dx \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f}(s) = \lim_{B\to\infty} \widehat{f}_B(s).$$

$$|\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|>B} |f(x)|\,|e^{-ixs}| dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_{B}^{\infty} |f(x)| dx \right).$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ miatt $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists B_0$, ha $B > B_0$, akkor

$$\int_{-\infty}^{-B} |f(x)| dx + \int_{B}^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon. \quad \Longrightarrow \quad |\widehat{f}(s) - \widehat{f}_B(s)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \quad \forall s.$$

$\widehat{f}_B(s)$ egyenletesen konvergál $\widehat{f}(s)$-hez, $B \to \infty$ esetén.

Az alaptétel

Tétel. Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teljesíti az 1.-2.-3. feltételeket. Ekkor:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Ez az INVERZ FOURIER TRANSZFORMÁCIÓ.

Megjegyzés. Elégséges feltétel fenti egyenletes konvergenciához:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)| dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |f''(x)| dx < \infty.$$

FT és inverz FT.

Tfh $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teljesíti az *1.-2.-3.* feltételeket.

$$f(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad \widehat{f}(s).$$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \longleftrightarrow \qquad \widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

Fourier transzformáció – Inverz Fourier transzformáció:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds.$$

Fourier sorok alaptétele, komplex alak. Ismétlés.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π szerint periodikus függvény, mely $[-\pi, \pi]$-ben teljesíti az *1.-2.-3.* feltételeket.

Ekkor

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}, \quad \text{ahol} \quad \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Analógia:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s) e^{isx} ds, \quad \widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx.$$

FT tulajdonságai

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx - i\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx\right)$$

Ha f páros, akkor FT valós értékű

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos(sx)dx.$$

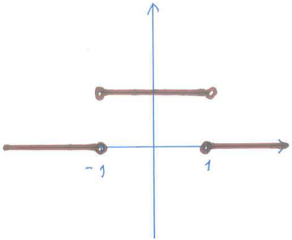
Ha f páratlan, akkor FT tisztán képzetes:

$$\widehat{f}(s) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin(sx)dx.$$

1. Példa

Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$



f páros, ezért

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \cos(sx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin s}{s}.$$

2. Példa

Legyen $f(x) = e^{-|x|}$. Ez páros függvény. FT:

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} \cos(sx) dx = ?$$

A múlt félévben igazoltuk, hogy

$$\int e^{-x} \cos(bx) dx = e^{-x} \frac{-\cos(bx) + b \sin(bx)}{1 + b^2} + c$$

Ezért

$$\widehat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-x} \cos(sx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 + s^2}.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai

1. *Linearitás*:

   $\mathcal{F}(cf, s) = c\mathcal{F}(f, s)$, $\mathcal{F}(f+g, s) = \mathcal{F}(f, s) + \mathcal{F}(g, s)$.

   BIZ. Az intergál lineáris operátor.

2. Ha f folytonos, akkor $\mathcal{F}(f)$ is folytonos.

   BIZ. A FT *folytonos* függvények *egyenletes* határérté.

3. (*Átskálázás*) $\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(f(x), \frac{s}{a})$, ha $a > 0$.

   Az integrálásban az $y = ax$ helyettesítéssel:

$$\mathcal{F}(f(ax), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\frac{s}{a}y} \frac{1}{a} dy.$$

A Fourier transzformált alaptulajdonságai, folytatás

4. (Idő megfordítása) $\mathcal{F}(f(-x), s) = \mathcal{F}(f(x), -s)$.

$$\mathcal{F}(f(-x), s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) e^{-isx} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(y) e^{isy} (-dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i(-s)y} dy.$$

5. (Idő eltolás) $\mathcal{F}(f(x - x_0), s) = e^{-ix_0 s} \mathcal{F}(f(x), s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(x - x_0), s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0) e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-is(y + x_0)} dy. \end{aligned}$$