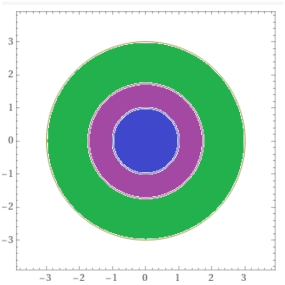
Integrálok. 4. rész

2021. április 21.

Improprius kettős integrál.

Példa. Ismétlés

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\, d(x,y) = ?$$



Közelítő tartomány-sorozat:

$$R_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

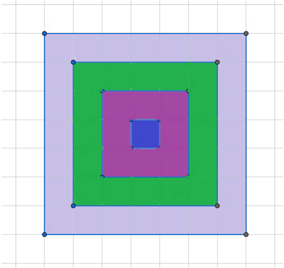
$$R_1 \subset \ldots R_n \subset \ldots, \text{ és } \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = \mathbb{R}^2.$$

Polárkoordinátákkal:

$$R'_n = \{0 \leq r \leq n,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0,n] \times [0,2\pi)$$

$$\iint\limits_{R_n} \ldots d(x,y) = \int_0^n \int_0^{2\pi} \ldots r\, d\theta\, dr \quad \Longrightarrow \quad \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \pi.$$

Példa folytatás



Más közelítő tartományok:

$$S_m = \{(x,y) : |x| \le m, |y| \le m\}.$$

$$S_1 \subset \dots S_m \subset \dots, \quad \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m = \mathbb{R}^2.$$

$S_m = [-m,m] \times [-m,m]$. Az integrál:

$$\iint_{S_m} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \int_{-m}^{m} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

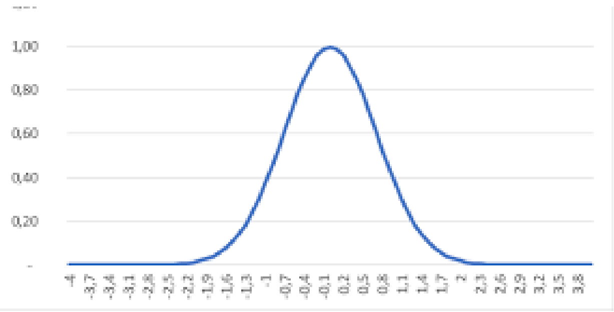
Másrészt

$$\lim_{m\to\infty} \iint_{S_m} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) = \pi$$

Következmény

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_{-m}^{m} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \pi \quad\Longrightarrow\quad \underline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.}$$

Ez lényegében a híres HARANGGÖRBE integrálja.



Integrálszámítás alkalmazásai

A tömegközéppont kiszámítása $\mathbb{R}^2$-ben

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$ alakú, inhomogén "lemez". Az (x, y)-beli *sűrűség* $\varrho(x, y)$. Tfh a $\varrho : R \to \mathbb{R}^+$ sűrűségfüggvény integrálható.

A TÖMEG egy kettős integrál: $m = \iint\limits_R \varrho(x, y)\, dR$

Az x SZERINTI NYOMATÉK m_x és az y SZERINTI NYOMATÉK m_y.

Ezek kiszámítása:

$$m_x = \iint_R x \cdot \varrho(x, y)\, dR, \quad m_y = \iint_R y \cdot \varrho(x, y)\, dR$$

A TÖMEGKÖZÉPPONT koordinátái (M_x, M_y):

$$M_x = \frac{m_x}{m} \quad \text{és} \quad M_y = \frac{m_y}{m}.$$

Felszín meghatározása

Adott egy $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$, $R \subset \mathbb{R}^2$ függvény. Ennek felülete:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \ : \ (x, y) \in R\}.$$

Állítás. A fenti felület mértéke így számolható:

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + {f'_x}^2(x, y) + {f'_y}^2(x, y)}\, d(x, y)$$

Analógia: Ha $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, akkor a függvény gráf hossza

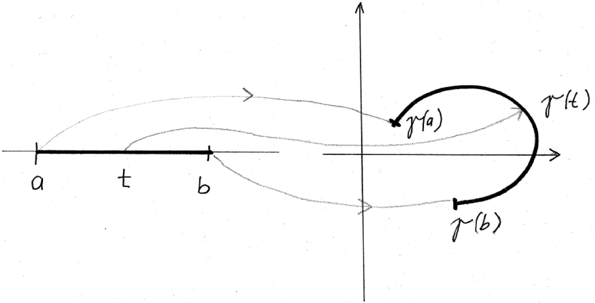
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + {f'}^2(x)}\, dx.$$

Jordan görbe. Ismétlés

Definíció. Adott $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, ahol $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

A függvény ÉK-e JORDAN GÖRBE.

$$\Gamma = \{(\gamma(t)) \ : \ t \in [a, b]\}.$$



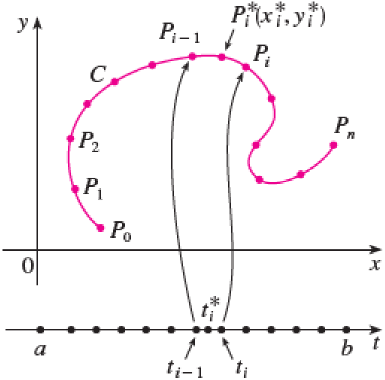
A Jordan görbe SIMA, ha az x és y függvények differenciálhatóak.

Görbe ívhossz

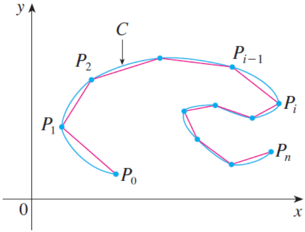
$[a, b]$ egy felosztása: $\mathcal{F}_n = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$.

A görbe a megfelelő pontjai

$$P_i = (x_i, y_i), \quad \text{ahol} \quad x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i)$$



A görbe ívhosszát közelítjük:



A i-edik ívdarab hosszának közelítése:

$$s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} =$$

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Így az ívhossz egy közelítése:

$$s(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Mi a határérték, ha $\delta_n := \max(|t_k - t_{k-1}|,\ k = 1, \ldots n) \to 0$?

Állítás. (*Ívhossz kiszámítása*) A Γ SIMA Jordan görbe ívhossza:

$$\boxed{s(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt}$$

Vonalintegrál $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban

Kétváltozós függvény vonalintegrálja

Adott a síkban egy Γ Jordan görbe:

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t \in [a,b]\}, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Tfh Γ sima görbe, azaz $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálhatók.

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$, melyre $\Gamma \subset R$. Adott egy $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^+$ függvény.

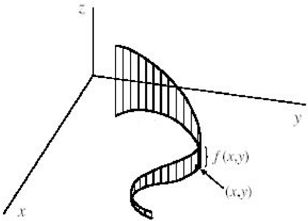
$$\int_\Gamma f(x,y)\, ds?$$

Vonalintegrál fizikai interpretációja

1.) Az alábbi felület nagysága:

$\{(x(t), y(t), z) : 0 \leq z \leq f(x(t), y(t))\}$

és $t \in [a, b]$



2.) $\Gamma \approx$ hajlított rúd a síkon. Az $(x, y) \in \Gamma$ pontban a rúd sűrűsége $f(x, y)$. $\Longrightarrow$ A rúd tömege

$$\int_\Gamma f(x, y)\, ds.$$

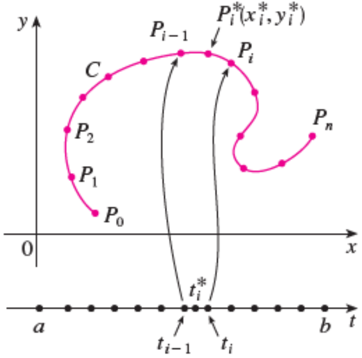
Kétváltozós függvény vonalintegrálja

$[a, b]$ egy felosztása:

$$a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b.$$

$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i)$

A görbe pontjai $P_i = (x_i, y_i)$



A vonalintegrál közelítése:

$$\int_\Gamma f(x.y)\,ds \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Vonalintegrál, folytatás

A felosztáshoz tartozó közelítő összeg:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i$$

Határátmenettel:

$$I = \int_\Gamma f(x, y)\, ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Definíció. Az f függvény VONALINTEGRÁLJA a Γ görbe mentén:

$$\int_\Gamma f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Példa. Speciálian $f(x, y) \equiv 1$. Ekkor $\displaystyle\int_\Gamma 1 ds = s(\Gamma)$,

Példa

Adott egy félkör alakú rúd.

$$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0.\}$$

Sűrűsége csökken, ha y nő.

$$f(x, y) = 1 - y.$$

Tömege $\int_\Gamma (1 - y)\, ds$.

A görbe paraméterezése: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi]$.

Ekkor $ds = \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)^{1/2} dt = dt$, ezért

$$\int_\Gamma (1 - y)\, ds = \int_0^\pi (1 - \sin t)\, dt = \pi - 2.$$

Vektormező vonalintegrálja.

$F : D \to \mathbb{R}^2$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$ vektormező.

A koordináta függvények $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, ezekkel

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tfh F differenciálható D-ben. Adott $\Gamma \subset D$ Jordan görbe.

$$\int_\Gamma F?$$

Fizikai háttér: $F \approx$ erőtér. Egy egységnyi tömegű részecske a Γ görbe mentén mozog. *Mekkora munkát végez?*

Vektormező vonalintegrálja 1.

Jelölés $\underline{r} = (x, y)$. A vektormező vonalintegrálja:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r}) d\underline{r}.$$

Ezt közelítő összegek határértékeként fogjuk értelmezni.

$[a, b]$ egy felosztása $\mathcal{F}_n = \{a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b.\}$

Γ megfelelő pontjai $\underline{r}_i = (x(t_i), y(t_i))$.

Az integrál közelítő összeg

$$I(\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle F(\underline{r}_i), (\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}) \right\rangle$$

Vektormező vonalintegrálja 2.

Tfh $n \to \infty$ mellett $\delta(\mathcal{F}_n) = \max\limits_{i=1,\dots n} (t_i - t_{i-1}) \to 0$. A vonalintegrál:

$$\int\limits_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} := \lim_{n\to\infty} I(\mathcal{F}_n).$$

Tétel. A fenti jelölésekkel és feltételekkel

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} &= \int\limits_{a}^{b} \langle\ F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\ \rangle dt = \\ &= \int\limits_{a}^{b} \Big(f_1(\gamma(t))\ \dot{x}(t) + f_2(\gamma(t))\ \dot{y}(t) \Big) dt.\end{aligned}$$

Példák: gyakorlatokon.

Primitív függvény keresés

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$, és $f : R \to \mathbb{R}$.

Ha f differenciálható, akkor deriváltja vektormező:
$\mathrm{grad}\, f : R \to \mathbb{R}^2$.

'Fordított' kérdés: Adott $F : R \to \mathbb{R}^2$ vektormező.

Van-e olyan $f : R \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre
$F = \mathrm{grad}\, f$?

Ha a válasz *igen*, akkor az F vektormezőnek van potenciálja.

Ekkor a vektormező potenciálos.

Tfh F-nek *van potenciálja*.

Γ egy sima görbe, mely $\Gamma \subset R$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \\
&= \int_a^b \langle \mathrm{grad}\ f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).
\end{aligned}
$$

Ha a görbe zárt, akkor $\gamma(a) = \gamma(b)$, és így az integrál 0.

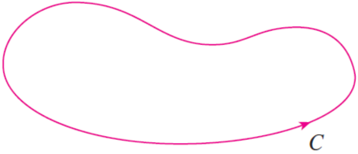
$$\oint_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$

Tétel. $R \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány.

Az F vektormezőnek pontosan akkor létezik potenciálja, ha

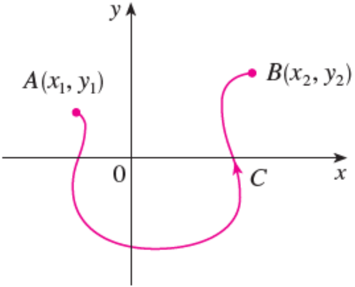
$\forall \Gamma \subset R$ zárt görbére

$$\oint_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$



Potenciálos vektormezők alaptétele

Következmény. Ha F potenciálos, akkor a vektormező vonalintegráljának értéke csak a görbe végpontjaitól függ.



Tehát ha adott két pont, akkor bármely őket összekötő görbe mentén a $\int_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r}$ vonalintegrál értéke ugyanaz.