Többes integrálok. 3. rész

2021. április 19.

Integrál transzformáció kettős integrálban. Ismétlés.

Tétel. $R \subset \mathbb{R}^2$, $f : R \to \mathbb{R}$ int-ható. A koordináta transzformáció:

$$x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v),$$

melynek Jacobi determinánsa $D(u, v) \neq 0$. Az új koordinátákban

$$R' = \{(u, v) : \ (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \in R\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_{R} f(x, y) d(x, y) = \iint\limits_{R'} f\big(\Phi(u, v), \Psi(u, v)\big) D(u, v) d(u, v).$$

Speciális eset: *polárkoordináták*

.

Ebben az esetben $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$, $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható.

Az integrálási tartomány polárkoordinátákban:

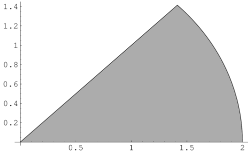
$$R' = \{(r, \theta) : \ (r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) \in R\}$$

Ezért az integrál transzformáció:

$$\iint\limits_{R} f(x, y) d(x, y) = \iint\limits_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \ r \ d(r, \theta).$$

Példa. $f(x,y) = x^2 - y^2$.

R egy nyolcadkör. $\displaystyle\iint_R f(x,y)dR = ?$



R polárkoordinátákban: $R' = \{(r,\theta) : \ 0 \le r \le 2, \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\}$.

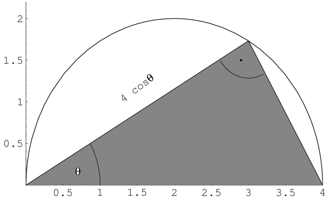
R az (r,θ) koordinátákban TÉGLALAP. Ekkor

$$\iint_R (x^2 - y^2) d(x,y) = \int_0^2 \int_0^{\pi/4} (r^2 \cos^2\theta - r^2 \sin^2\theta)\, r\, d\theta\, dr =$$

$$= \int_0^2 r^3\, dr \cdot \int_0^{\pi/4} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{\sin(2\theta)}{2}\right]_0^{\pi/4} = 2.$$

2. Példa. $f(x,y) = xy$. Az integrálási tartomány egy félkör:

$$R = \{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \le 4,\ \ y \ge 0\}$$

. 

Polárkoordinátákban $R' =$

$$\{(r,\theta) :\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le r \le 4\cos\theta\}.$$

Ez θ szerinti NORMÁLTARTOMÁNY. Így

$$\iint_R xy\ d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{4\cos\theta} (r\cdot\cos\theta)\ (r\cdot\sin\theta)\ \cdot r \quad dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=4\cos\theta} \cos\theta\ \ \sin\theta\ \ d\theta = 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\ \ \sin\theta\ \ d\theta = \frac{32}{3}.$$

Integrál 3-változós függvényekre.

Az integrál értelmezése

$S \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $f : S \to \mathbb{R}$ függvény, $f(x, y, z)$.

A kettős integrálhoz hasonlóan értelmezhető határértékként:

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\ d(x, y, z)$$

Fizikai interpretációja: tömeg (Ha $f \geq 0$).

Az S térrészben adott egy szilárd test. Ennek sűrűsége az (x, y, z) pontban $f(x, y, z)$. Ekkor a test tömege:

$$\iiint\limits_S f(x, y, z) d(x, y, z)$$

Speciálisan, $f(x, y, z) \equiv 1$ esetén: térfogat mérőszáma.

Háromdimenziós intervallum

Tfh $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$,ahol $a_k < b_k \in \mathbb{R}$.

$$R = \{(x, y, z) : \ x \in [a_1, b_1], \ y \in [a_2, b_2], \ z \ \in [a_3, b_3]\}$$

R zárt és korlátos. Adott $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.

Tétel. A fenti feltételek mellett

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)\ dz\ dy\ dx.$$

(Belülről kivülre.) Az integrálások sorrendje felcserélhető.

Három dimenziós normáltartomány.

Definíció. $R \subset \mathbb{R}^3$ (x, y) szerinti NORMÁLTARTOMÁNY, ha

1. $\exists S \subset \mathbb{R}^2$,
2. $\exists F_1,\ F_2 : S \to \mathbb{R}$, melyekre $F_1(x, y) \leq F_2(x, y)$ $\forall (x, y) \in S$,

és ezekkel a térbeli tartomány így írható:

$$R = \{(x, y, z)\ :\ (x, y) \in S,\ F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y)\}.$$

Hasonlóan definiálható a többi irányú normáltartomány. **HF**

Integrál háromdimenziós normáltartományon.

Tétel. Legyen R (x, y) szerinti normáltartomány:

$$R = \{(x, y, z) \ : \ (x, y) \in S, \ F_1(x, y) \leq z \leq F_2(x, y)\}.$$

$f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Ekkor

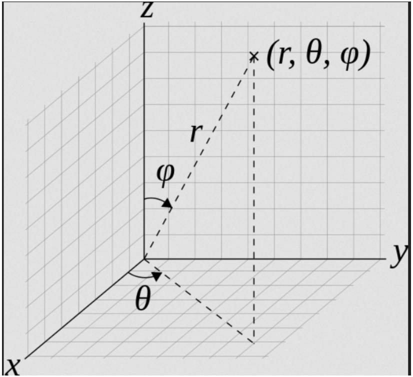
$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \iint\limits_S \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right) d(x, y).$$

Speciálisan, ha $S = [a, b] \times [c, d]$, akkor

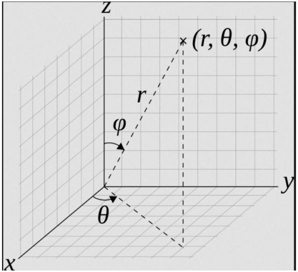
$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d \left(\int\limits_{F_1(x,y)}^{F_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz \right) dy\ dx.$$

Szférikus (=gömbi) koordináták $\mathbb{R}^3$-ban.

Egy (x, y, z) pont gömbi koordinátái (r, φ, θ), ahol:



1. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, a pontba mutató vektor hossza, $r \geq 0$
2. φ: a pontba mutató vektor és a z^+ tengely szöge. $\varphi \in [0, \pi]$
3. θ: a pontba mutató vektor (x, y) sík-vetületének és x^+ szöge. $\theta \in [0, 2\pi)$



A gömbi koordinátákkal tehát az (x, y, z) pont így írható le:

$$
\begin{aligned}
z &= r\cos\varphi \\
x &= r\sin\varphi\cdot\cos\theta \\
y &= r\sin\varphi\cdot\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Az $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ transzformáció Jacobi mátrixa:

$$
J(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.
$$

Belátható, hogy a mátrix determinánsa $\det J = r^2 \sin\varphi$. **HF**

Koordináta transzformáció $\mathbb{R}^3$-ban, általános eset.

Új koordinátarendszer: (x, y, z) helyett az (u, v, w) lesz.

A transzformáció egy HÁROMVÁLTOZÓS VEKTORMEZŐ:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(u, v, w) \\ y &= \Psi(u, v, w) \\ z &= \chi(u, v, w) \end{aligned} \qquad F(u, v, w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Egy $R \subset \mathbb{R}^3$ tartomány képe $R' \subset \mathbb{R}^3$ lesz:

$$R' = \{(u, v, w) : \; F(u, v, w) \in R\}.$$

Helyettesítés hármas integrálban.

Tétel. $R \subset \mathbb{R}^3$ korlátos és zárt. $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény.
A koordinátatranszformációban tfh Jacobi mátrixa nemszinguláris.

$$J(u,v,w) = \begin{pmatrix} \Phi'_u & \Phi'_v & \Phi'_w \\ \Psi'_u & \Psi'_v & \Psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{pmatrix}, \quad D(u,v,w) = \det J(u,v,w) \neq 0.$$

Ekkor

$$\iiint_R f(x,y,z)d(x,y,z) = \iiint_{R'} f\left(\Phi(\cdot), \Psi(\cdot), \chi(\cdot)\right) D(u,v,w)\, d(u,v,w$$

Példa. Az egységgömb térfogata?

$$R = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}, \qquad V = \iiint\limits_R 1 \; d(x, y, z) = ?.$$

A gömbi koordináták r, φ, θ, az áttérés

$$x = r \sin\varphi \cdot \cos\theta, \qquad y = r \sin\varphi \cdot \sin\theta, \qquad z = r \cos\varphi.$$

A Jacobi determináns $D(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\varphi$. Gömbi koordinátákkal:

$$R' = \{r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, 1] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi).$$

$$\Longrightarrow \quad V = \int\limits_0^1 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} r^2 \sin\varphi \; d\theta \; d\varphi \; dr = 2\pi \int\limits_0^1 r^2 \, dr \int\limits_0^\pi \sin\varphi \; d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

Improprius kettős integrál.

Nem korlátos függvény integrálja.

$R \subset \mathbb{R}^2$ korlátos tartomány. Tfh $f : R \to \mathbb{R}$ folytonos

néhány pontot kivéve ahol $\nexists$ véges határértéke.

Pl $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, R az egységkör. Legyen $f(0, 0) := 0$

Legyen $R_1 \subset \ldots R_n \subset \ldots \subset R$ olyan tartománysorozat, hogy

1. f folytonos az R_n tartományon,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$.

Definíció. f IMPROPRIUS ÉRTELEMBEN INTEGRÁLHATÓ, ha

$$\exists \lim_{n\to\infty} \iint\limits_{R_n} f(x, y)d(x, y) = I,$$

és ez független az (R_n) halmaz-sorozat megválasztásától.

Tétel. Tegyük fel, hogy $\exists(R_n)$ halmaz-sorozat, melyre

- f *folytonos* R_n-en,
- $R_n \subset R_{n+1}$ minden n-re,
- $\lim\limits_{n\to\infty} A(R_n) = A(R)$,
- és $\displaystyle\iint\limits_{R_n} |f(x,y)|d(x,y) < M$, $\forall n$.

Ekkor f improprius értelemben integrálható.

Improprius integrál nem korlátos tartományon

R nem korlátos. $f : R \to \mathbb{R}$.

Tfh van olyan $R_1 \subset R_2 \subset \ldots R_n \subset \ldots \subset R$ mérhető halmaz sorozat, melyre $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$.

Tfh $\forall n$-re $\iint_{R_n} f(x,y)d(x,y)$ véges.

Definíció. f IMPROPRIUS ÉRTELEMBEN INTEGRÁLHATÓ, ha $\exists \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)d(x,y)$, és ftlen (R_n) választásától.

$$\iint_R f(x,y)\,dR := \lim_{n\to\infty} \iint_{R_n} f(x,y)\,dR_n.$$

Elégséges feltétel improprius integrálra

Tétel. Tfh van olyan $R_1 \subset R_2 \subset \ldots R_n \subset \ldots \subset R$ mérhető tartománysorozat, melyre $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n = R$, és $\exists M > 0$:

$$\iint_{R_n} |f(x,y)| d(x,y) \leq M \quad \forall n.$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható, és $\forall (S_n)$ halmaz sorozat esetén, a fenti feltételekkel:

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{S_n} f(x,y) d(x,y) = \iint_R f(x,y)\, d(x,y).$$

Példa.

$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$, az integrálási tartomány $R = \mathbb{R}^2$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = ?$$

Közelítő tartomány-sorozat: $R_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}$.

Polárkoordinátákkal: $R'_n = \{(r,\theta)\} = [0,n] \times [0,2\pi)$

$$\iint_{R_n} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \iint_{R'_n} e^{-r^2} r \, d(r,\theta) = 2\pi \int_0^n e^{-r^2} r \, dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^n \quad \longrightarrow \quad 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{1-e^{-n^2}}{2} = \pi.$$