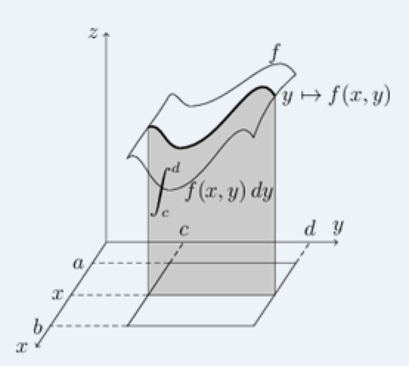
# Többes integrálok. 2. rész

2021. április 14.

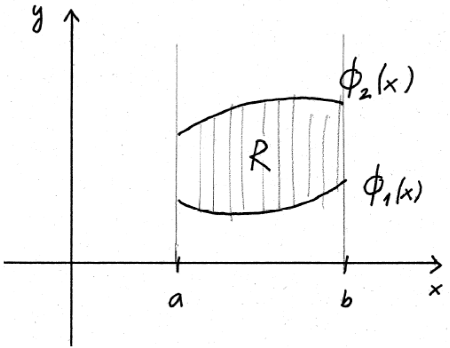
# Kettős integrál téglalapon. Ismétlés

$R = [a, b] \times [c, d]$. $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható fv. Ekkor

$$\iint_R f(x, y)\, dR = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$



# Normáltartomány I.




Definíció. Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ halmaz $x$ szerinti normáltartomány, ha:

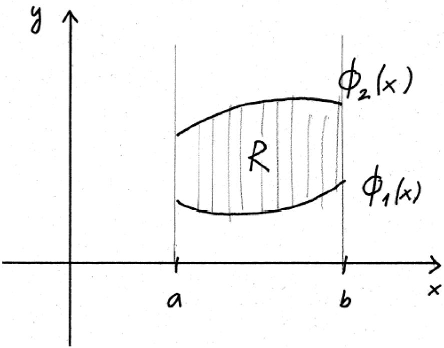
$\exists[a, b]$ és $\exists\Phi_1, \Phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények, melyekre $\Phi_1 \leq \Phi_2$,

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,\ \Phi_1(x) \leq y \leq \Phi_2(x)\}.$$

# Integrálás normáltartományon I.

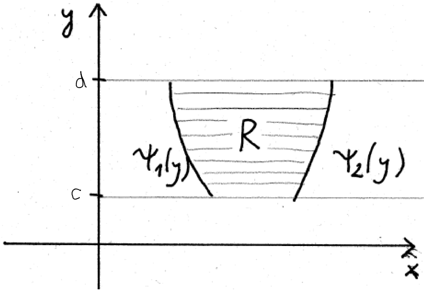
**Tétel.** $R$ egy $x$ szerinti *normáltartomány*. $f$ integrálható $R$-en.

Ekkor $$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_a^b \left( \int_{\Phi_1(x)}^{\Phi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



# Normáltartomány II.

Definíció. $R \subset \mathbb{R}^2$ $y$ szerinti normáltartomány, ha




$\exists [c, d]$ és $\exists \Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ függvények, $\Psi_1 \leq \Psi_2$, melyekre

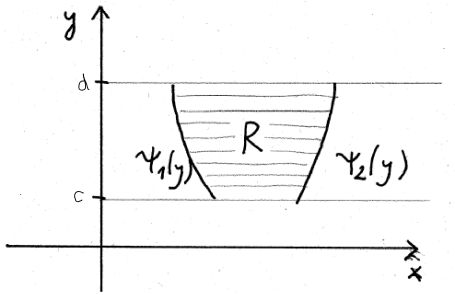
$$R = \{(x, y) : c \leq y \leq d, \ \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y)\}.$$

# Integrálás normáltartományon II.

**Tétel.** Tfh $f$ integrálható $R$-en, $R$ egy $y$ szerinti normáltartomány.

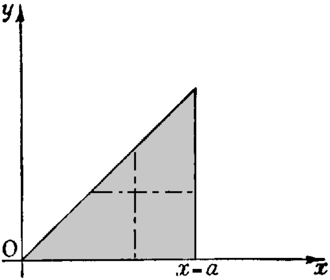
Ekkor

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int\limits_c^d \left( \int\limits_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$



# Példa

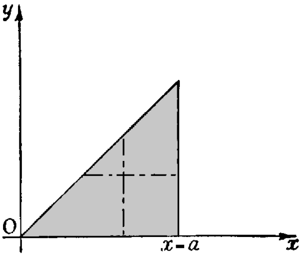
$R$ háromszög alakú tartomány, csúcsai: $(0,0)$, $(a,0)$ és $(a,a)$.




Ekkor $R$ mindkét változó szerint normáltartomány, éspedig

$$\{(x,y):\ 0 \leq x \leq a,\quad 0 \leq y \leq x\},$$

$$\{(x,y):\ 0 \leq y \leq a,\quad y \leq x \leq a\}.$$



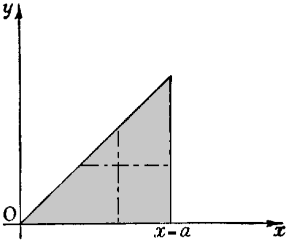

$R$ a háromszög tartomány. Adott $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható. Ekkor

$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \left( \int_0^x f(x,y)dy \right) dx = \int_0^a \left( \int_y^a f(x,y)dx \right) dy.$$

Ha speciálisan $f(x,y) = \phi(y)$ alakú, akkor

$$\int_0^a \int_y^a \phi(y)dx\ dy = \int_0^a \phi(y)(a-y)dy.$$

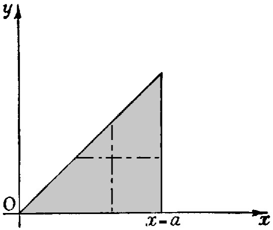
*Példa.* Határozzuk meg $f(x,y) = xy$ integrálját a háromszögtartományon:




$$\iint\limits_R xy\, d(x,y) = \int\limits_0^a \left( \int\limits_0^x xy\, dy \right) dx = \int\limits_0^a \left( x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^a \frac{x^3}{2}\, dx = \frac{a^4}{8}.$$

# Tipikus hibák!




$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \left( \int_0^x f(x,y)dy \right) dx.$$

$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \left( \int_y^a f(x,y)dx \right) dy.$$

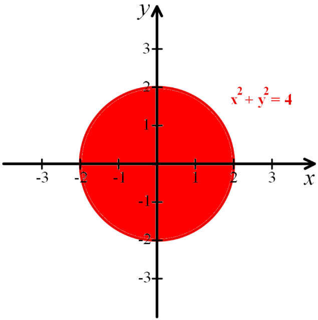
$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_0^a \int_0^{\cancel{a}} f(x,y)dy\ dx.$$

$$\iint_R f(x,y)\,dR = \int_0^{\cancel{x}} \int_y^a f(x,y)dx\ dy.$$

# 1. "Nehéz" (?) példa

Legyen $R$ egy kör,

$R = \{(x, y) : \quad x^2 + y^2 \leq 4\}.$



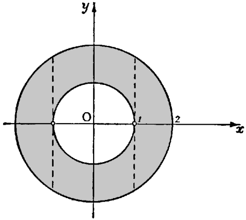

Ekkor

$$\iint_R f(x, y)\, d(x, y) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\, dy\ dx.$$

# 2. "Nehéz" (?) példa

Legyen $R$ körgyűrű:

$R = \{(x,y) : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}.$

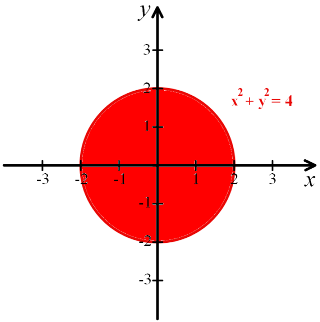



$$\iint\limits_R f(x,y)\,dR = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx.$$

AJJAJ...

# Kör alakú tartomány másképp




$$R = \{(x,y):\ 0 \le x^2+y^2 \le 4]\}.$$

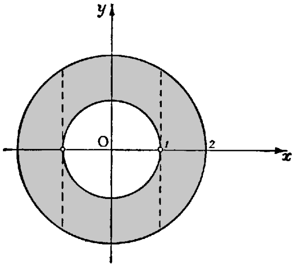
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx$$

Polárkoordinátákban a körtartomány:

$$R' = \{(r,\theta):\ 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta < 2\pi\} = [0,\ 1] \times [0,\ 2\pi).$$

Téglalap

# Körgyűrű alakú tartomány másképp




$$R = \{(x, y) : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Polárkoordinátákban:

$$R' = \{(r, \theta) : \ 1 \leq r \leq 2, \ 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

$$R' = [1,\ 2] \times [0,\ 2\pi). \qquad \boxed{\text{Téglalap}}$$

$\longrightarrow$ *Térjünk át polárkoordinátákra az integrál belsejében!*

# Helyettesítés integrálban, valós függvény, ismétlés.

Tétel. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrálható. ($x = \phi(t)$ a helyettesítés.)

Tfh $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ szigorúan monoton és differenciálható,

$$\phi(\alpha) = a, \qquad \phi(\beta) = b.$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\ \phi'(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\ \phi'(t)dt.$$

Általánosítás kettős integrálra?

# Integrál transzformáció kettős integrálban

**Tétel.** $R \subset \mathbb{R}^2$, $f : R \to \mathbb{R}$ int-ható. A koordináta transzformáció:

$$x = \Phi(u, v), \qquad y = \Psi(u, v)$$

Tfh Jacobi mátrixa sehol nem szinguláris.

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} \Phi'_u(.) & \Phi'_v(.) \\ \Psi'_u(.) & \Psi'_v(.) \end{pmatrix}, \quad D(u, v) \neq 0$$

Az új koordinátákban $R$:

$$R' = \{(u, v) : \ (\Phi(u, v), \Psi(u, v)) \in R\}.$$

Ekkor

$$\iint\limits_R f(x, y) d(x, y) = \iint\limits_{R'} f\big(\Phi(u, v), \Psi(u, v)\big) D(u, v) d(u, v).$$

# Speciális eset: polárkoordináták

$(x, y)$ helyett az új koordináták $(r, \theta)$, ahol

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta).$$

A Jacobi determináns:

$$D(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$

Így a megfelelő integrál transzformáció:

$$\iint_R f(x, y)d(x, y) = \iint_{R'} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\ r\ d(r, \theta).$$

$$R' = \{(r, \theta) :\ (r\cos(\theta),\ r\sin(\theta)) \in R\}$$